	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017

ÁREA: Matemáticas			**DOCENTE:**	
ASIGNATURA: Matemáticas			**ESTUDIANTE:**	
GRADO: Ciclo IV	**MÓDULO**: 3	**GUÍA:** 1	**TIEMPO:**	**FECHA:** ____/ ____ / ____

1. **COMPETENCIAS Y CRITERIOS**

COMPETENCIAS	CRITERIOS
• Interpretación y representación. • Formulación y ejecución. • Argumentación.	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. • Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. • Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. • Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).

2. TÍTULO DE LA GUÍA

FUNCIONES, TEOREMA DE THALES, SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS Y PRINCIPIOS DE CONTEO

3. SITUACIÓN PROBLEMA

En el equipo de futbol 5 del curso de noveno, se ha realizado un listado en el que se escribe la talla de cada jugador, con el fin de adquirir los uniformes para el equipo:

JUGADORES	TALLA
Pedro, Carlos, Eduardo, Pablo	S
José, Camilo, Andrés, Felipe, Sebastián	M
Joaquín, Víctor, Óscar	L

Tabla 1

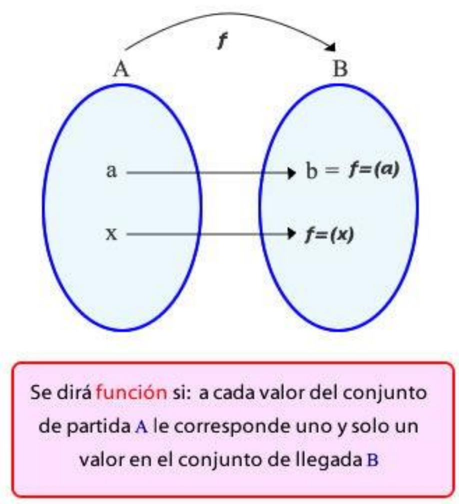
¿Es posible que se tengan dos uniformes de diferentes tallas para un jugador?
Si se observa el listado nos damos cuenta que todos los jugadores tienen una talla asociada y que, además, no hay jugador que tenga asociada dos tallas, esto es que existe una asociación entre los conjuntos Jugadores y Tallas, en donde todos los jugadores tienen asociada una y solo una talla para su uniforme. ¿Qué tipo de nombre recibe una relación como la existente entre los jugadores y la talla, matemáticamente hablando?

4. MEDIACIÓN DEL CONOCIMIENTO Y DEL PROBLEMA

4.1. FUNCIONES

Una función es una relación entre dos conjuntos X e Y, en la que a todo elemento del conjunto X le corresponde un único elemento del conjunto Y.

Así una función definida del conjunto X en el conjunto Y se simboliza $f: X \to Y$ donde X es el conjunto de partida e Y es el conjunto de llegada.



Gráfica 1

Además, si los elementos a y b se relacionan mediante la función f, de modo que $a \in X$ y $b \in Y$, entonces, b es la **imagen** de a y se escribe $f(a) = b$ que se lee "f de a igual a b"

La expresión f(x) indica el valor de la función f asociado al número x.

Las funciones describen fenómenos cotidianos, económicos, psicológicos, científicos... Tales funciones se obtienen experimentalmente, mediante observación.

Figura 1

Ver el siguiente video sobre funciones https://www.youtube.com/watch?v=Ll7xfe3HoZE

4.1.1. LOS ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN SON:

DOMINIO: Es el conjunto de partida de la función, se escribe Dom f
CODOMINIO: Es el conjunto de llegada de la función, se escribe Cod f
RANGO: Es el conjunto formado por los elementos del codominio que son imagen de los elementos del dominio, se escribe Ran f. En algunas ocasiones el codominio coincide con el rango.

Figura 2

Ver el siguiente video sobre elementos de una función. https://www.youtube.com/watch?v=797t1-jZcsc

4.1.2. VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES.

Figura 3

Cuando se establece una función entre dos magnitudes, se puede observar que una de ellas depende de los valores que le asignen a la otra. Así, en una función existen dos tipos de variables: La Variable dependiente y la variable independiente. Por ejemplo, en la función C(x)=17.000x, donde C(x) es el costo de producción de x artículos, se tiene que x es la variable independiente y C(x) la variable dependiente, ya que el costo depende de la cantidad de artículos que se produzcan. Ver el siguiente video sobre variable dependiente e independiente https://www.youtube.com/watch?v=d2XtwzaPvUg

4.1.3. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Las funciones se pueden representar mediante:

- diagrama sagital
- tabla de valores
- expresión algebraica
- gráficamente, en el plano cartesiano.

Ejemplo: función que asigna a cada número natural el triple. Expresión algebraica: $f(x) = 3x; x \in \mathbb{N}$

Ver el siguiente video sobre representación de funciones. https://www.youtube.com/watch?v=A7OrJ8IlIeE

Figura 4

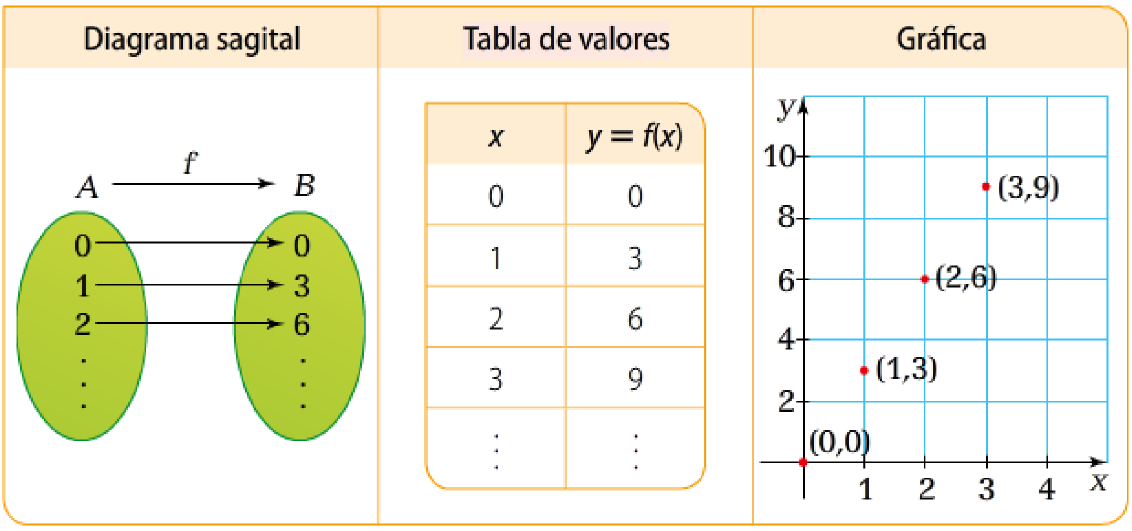


Tabla 2

Para representar una función en un gráfico, los valores de la variable independiente (x) se representan sobre el eje horizontal o de las abscisas, y los valores de la variable dependiente (y) se representan sobre el eje vertical o de las ordenadas.

Para representar gráficamente una función:

1.º Se identifica la variable independiente y la variable dependiente.
2.º Se hace una tabla de valores.
3.º Se dividen los ejes de coordenadas en partes iguales que sean acordes con los resultados de la tabla.
4.º Se representan los pares de valores y se obtiene un conjunto de puntos aislados.
5.º Si tiene sentido se unen los puntos, obteniéndose una línea que constituye la gráfica de la función.

4.1.4. FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Es aquella cuyo dominio y rango son el conjunto de los números reales o subconjuntos de números reales.

En estas funciones, no es posible indicar todas las parejas ordenadas que constituyen una función real, por tanto, se utiliza la fórmula $y = f(x)$ para referirse a estas funciones.

La grafica de una función real f es el conjunto de puntos (x, y) del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Como no es posible representar todos los puntos en la gráfica de una función, entonces, solo se ubican algunos de ellos y se unen mediante un trazo, teniendo en cuenta los valores para los cuales la función está definida, es decir, que pertenezcan al dominio de la función. De esta manera se obtiene el bosquejo de la gráfica de una función real.

Para determinar el dominio y el rango de una función real es necesario efectuar una inspección particular que analice su comportamiento, para lo cual se recomienda: para el dominio, que esté despejada la variable dependiente y para el rango que lo esté la variable independiente

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017

4.1.5. MÉTODO GRÁFICO PARA IDENTIFICAR FUNCIONES

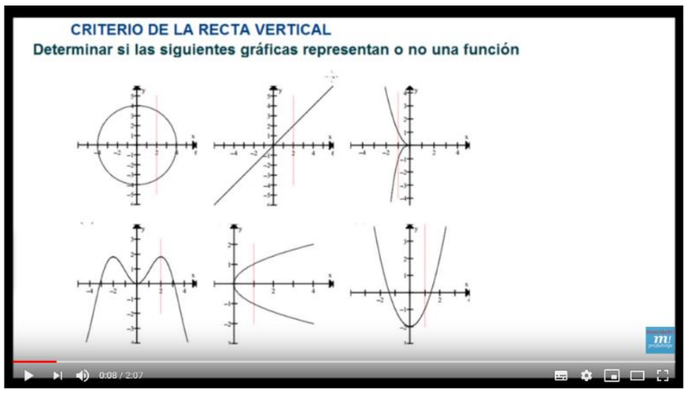


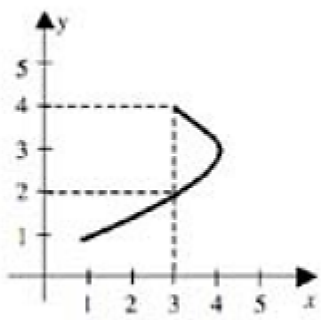
Figura 5

Este método se denomina **prueba de la recta vertical**, consiste en trazar líneas rectas verticales y verificar que cualquiera de ellas corte la gráfica de la función en máximo un solo punto. En caso contrario, no correspondería a una función.

Ver el siguiente video sobre método gráfico para identificar funciones.

https://www.youtube.com/watch?v=hw1xFechhHM

EJEMPLO: La siguiente gráfica, ¿corresponde a una función?

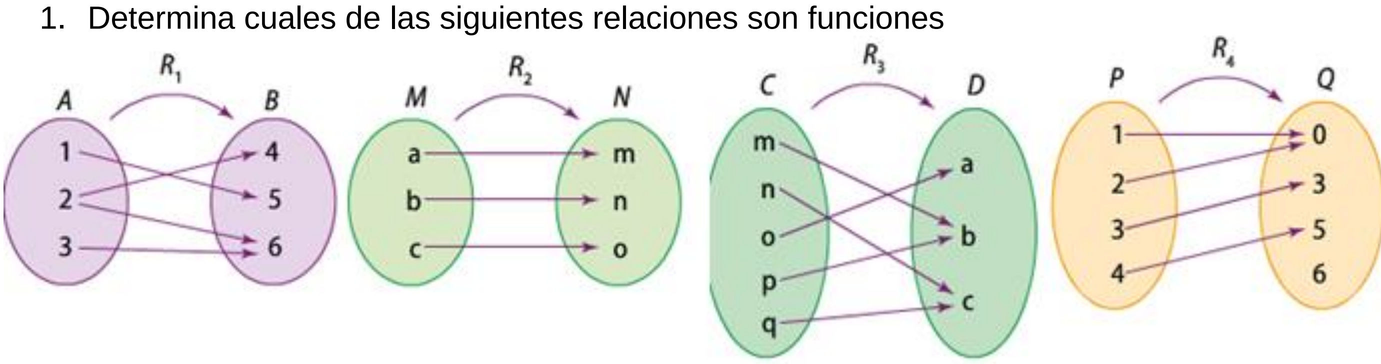


El gráfico no corresponde a una función ya que al trazar la línea recta vertical por x=3, hay elementos del dominio que tienen más de una imagen, es decir, la recta toca más de un punto de la gráfica. Por ejemplo: f (3) = 2 y f (3) = 4

Gráfica 2

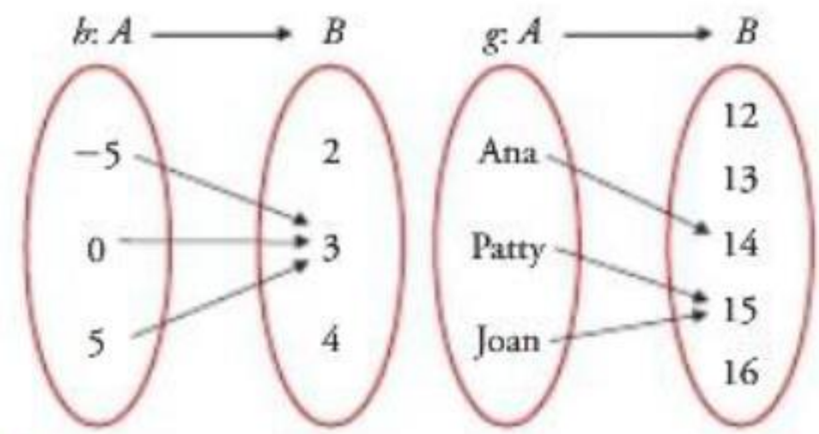
4.1.6. ACTIVIDAD PERSONAL 1

1. Determina cuales de las siguientes relaciones son funciones



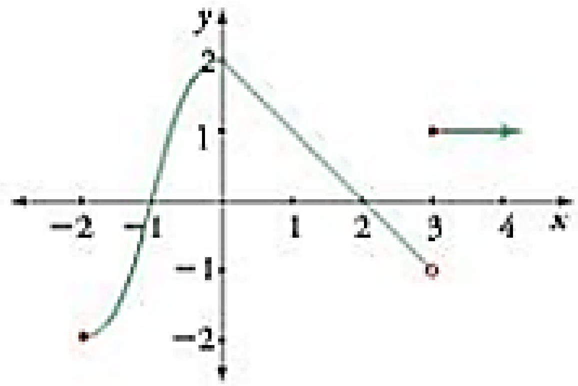
Gráfica 3

2. Determina el dominio, codominio y rango de cada función



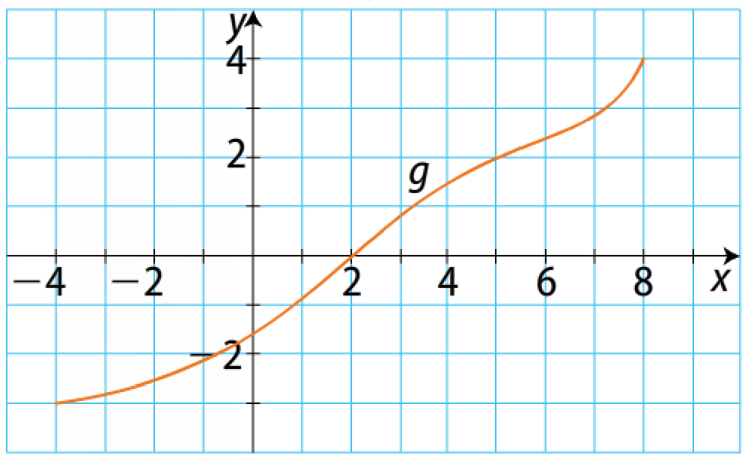
Gráfica 4

3. Determina las siguientes imágenes a partir de la gráfica de $f(x)$
   $f(0)$
   $f(-1)$
   $f(-2)$
   $f(4)$
   $f(1)$
   $f(3)$



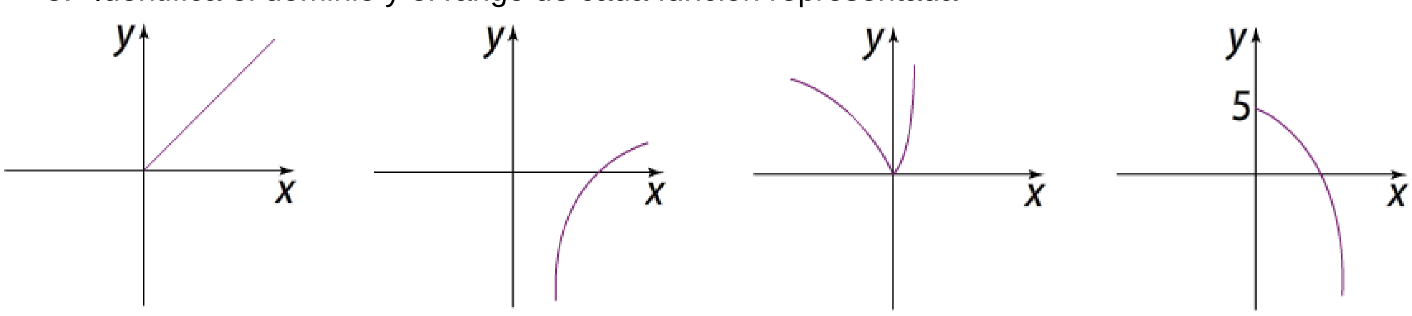
Gráfica 5

4. Indica el dominio y el rango de la función representada



Gráfica 6

5. Identifica el dominio y el rango de cada función representada



Gráfica 7

6. Halla la expresión algebraica que representa cada una de las siguientes funciones. Luego, realiza la tabla de valores y la gráfica

a. Un vehículo transita manteniendo una velocidad constante y recorre 60 km en una hora, 120 km en dos horas y 180 km en tres horas.
b. El precio de venta de un artículo es el doble del precio de compra más $500.
c. En una tienda de cambios, el dólar para la venta cuesta $3.200.

7. Indica cuáles son las variables dependiente e independiente según la gráfica. Luego, escribe una situación que se represente con ella y su correspondiente expresión algebraica.

Gráfica 8

8. La siguiente tabla relaciona la presión que ejerce el agua en el mar según la profundidad.

Profundidad (m)	1	2	3	10
Presión (atmósferas)	0,096	0,192	0,288	0,96

Tabla 3

a. Determina cuales son las variables dependiente e independiente
b. Realiza una gráfica de la función
c. Escribe la expresión algebraica que relaciona ambas magnitudes
d. Halla la presión que corresponde a una profundidad de 15 metros

9. Un vendedor de electrodomésticos tiene un salario básico de $580.000 y una comisión de $20.000 por cada electrodoméstico que venda

a. Escribe cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente.
b. Completa la siguiente tabla
c. Halle una expresión algebraica para calcular el salario del vendedor en función del número de electrodomésticos que venda

Número de electrodomésticos	1	2	3	4
Salario total				

Tabla 4

10. Realiza las tablas de valores y representa en el plano cartesiano las siguientes funciones.
    a. $y = 2x - 5$
    b. $f(x) = 2x^2$
    c. $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
    d. $h(x) = \sqrt{x - 1}$

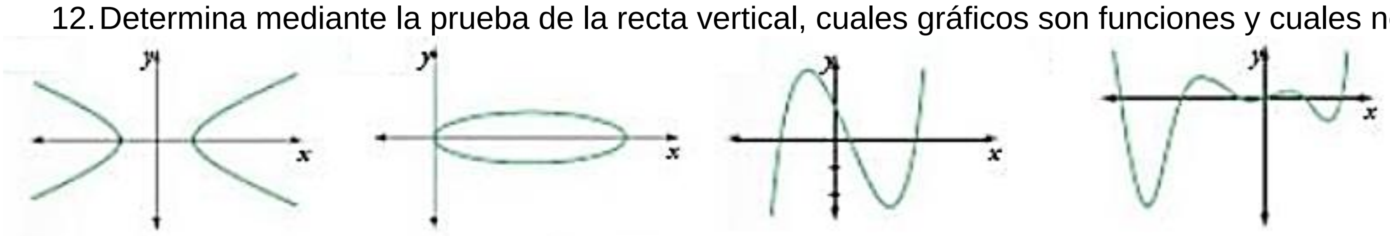
11. El movimiento de una partícula se describe por medio de la siguiente tabla de valores:

Tiempo segundos	0	1	2	3	4	5
Distancia cm	2	4	6	8	10	12

Tabla 5

a. Realiza la gráfica que describe el movimiento de la partícula.
b. Encuentra la fórmula que describe el movimiento de la partícula.
c. ¿A qué distancia estará la partícula después de 10 segundos?
d. ¿cuánto tiempo transcurrió si la partícula se encuentra a 18 cm del punto inicial?

12. Determina mediante la prueba de la recta vertical, cuales gráficos son funciones y cuales no

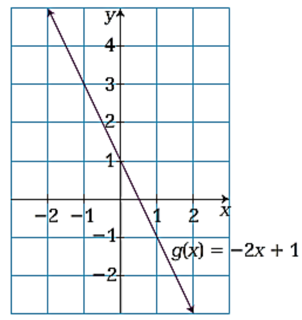


Gráfica 9

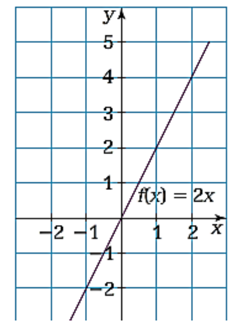
4.1.7. FUNCIÓN LINEAL Y AFIN

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = mx$, donde m es un número real.

Una **función afín** es una función de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales diferentes de cero.



Gráfica 11



Gráfica 10

EJEMPLO: $f(x) = 2x$ es una función lineal y $g(x) = -2x + 1$ es una función afín. Gráficamente la lineal pasa por el origen, mientras la afín por b en el eje y

EJEMPLO: Juan es un taxista que cobra \$280 por bajada de bandera y \$ 60 por cada tramo de 200 metros recorridos. Si llamamos x al número de tramos recorridos, la función que permite determinar el costo de un viaje en el taxi de Juan es:

$$f(x) = 60x + 280$$

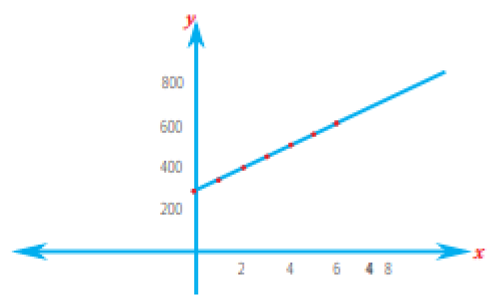
Variables involucradas: cantidad de dinero a pagar por viaje, cantidad de tramos recorridos

Tabla de valores

x (tramos)	$f(x)$ \$
0	280
1	340
2	400
3	460
4	520
5	580
6	640

Tabla 6

Gráfica de la función



Gráfica 12

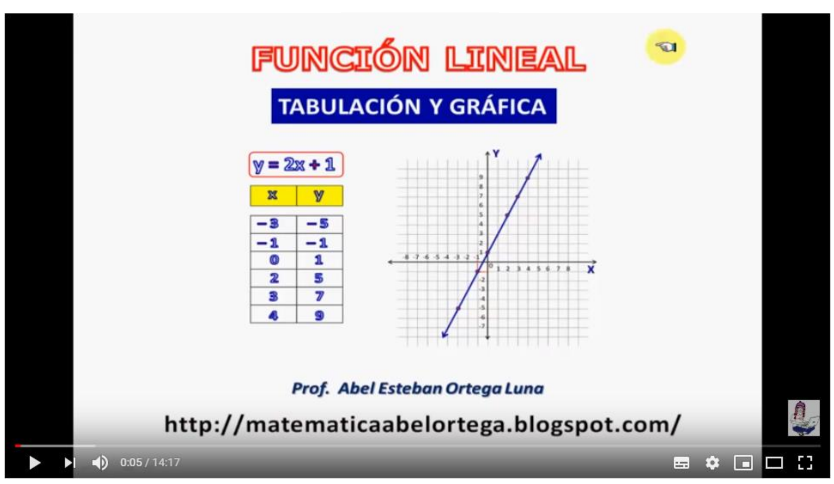


Figura 6

Ver el siguiente video sobre funciones lineales. https://www.youtube.com/watch?v=K-C6l6tH95Q

4.1.8 ACTIVIDAD PERSONAL 2

1. Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines

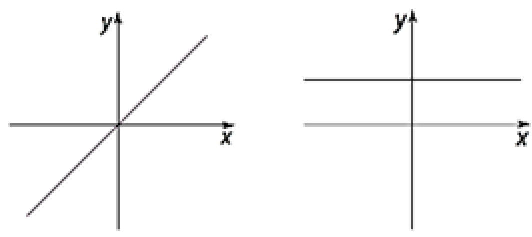
$f(x) = 0{,}3x$ $\qquad$ $g(x) = 105x$

$g(x) = 1 - x$ $\qquad$ $h(x) = 4{,}5 + 2x$

$h(x) = \sqrt{2}\,x$ $\qquad$ $f(x) = 17.000x$

$f(x) = 10 - 10x$ $\qquad$ $g(x) = 0{,}01 - 0{,}1x$

2. Propón una posible expresión algebraica que se relacione con cada gráfica. Luego, clasifícala en lineal o afín. Justifica tu respuesta.



Gráfica 13

3. Traza la gráfica correspondiente a cada tabla de valores. Luego, determina si la función es lineal o afín.

x	y
1	2
2	4
0	0

x	y
0	3
1	4
2	5

Tabla 7

4. Traza la grafica de cada función, determina el dominio y el rango de cada una
   a. $f(x) = -x$
   b. $f(x) = 4x$
   c. $f(x) = -x - 1$
   d. $f(x) = 4x + 3$

5. Por el alquiler de un automóvil se pagan 600 dólares mensuales más 30 dólares adicionales por cada día que transcurre después del plazo de entrega.
   a. Escribe la expresión algebraica que relaciona la cantidad de días adicionales, con el costo total de alquiler del automóvil en un mes.
   b. Realiza una tabla de valores en la que incluyas el costo correspondiente al alquiler de un mes más 1, 2, 3, 4, 5 y 6 días adicionales.
   c. Realiza la gráfica de la función.
   d. Responde ¿Cuánto debe pagar un cliente por el alquiler de un automóvil durante un mes y 15 días adicionales?
   e. Si un cliente pagó en total 960 dólares ¿Cuántos días adicionales tuvo el cliente el automóvil?

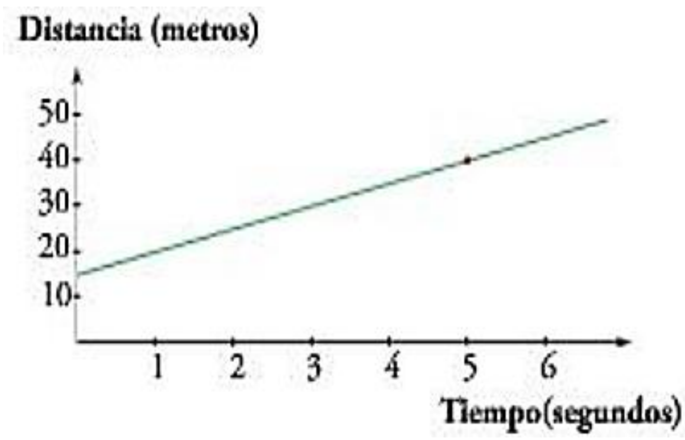
6. Cuando una persona hace deporte debe saber si se ha ejercitado demasiado o le hace falta ejercicio, para ello la persona debe tomar el pulso y determinar su frecuencia cardiaca. Según la edad de cada persona, hay una determinada cantidad de latidos del corazón que es el ideal. Para calcular la cantidad de latidos por persona según la edad, se utiliza la fórmula:

$$L(a) = -\frac{7}{10}a + 208$$

Donde a es la edad de la persona.

a. Determina si esta función es lineal o afín
b. Elabora la tabla de valores
c. Gráfica la función

7. Un móvil parte de un punto y se mueve con velocidad constante. La relación entre el tiempo y la distancia recorrida se representa en la siguiente gráfica



¿A qué distancia se encontraba el móvil en $t = 0$?

a. ¿Cuál es la velocidad del móvil? (Ten en cuenta que la velocidad v esta dada por $v = \frac{d}{t}$, donde d es la distancia y t es el tiempo)

b. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la función mostrada en la gráfica?

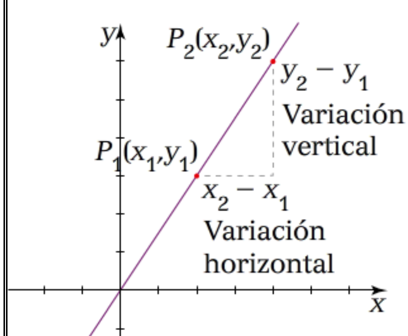
c. ¿En qué momento el móvil estará a 80 metros del punto 0?

Gráfica 14

4.2. LA RECTA

La grafica de una función lineal o afín es una línea recta. En una línea recta se puede determinar su grado de inclinación y su ecuación.

4.2.1. LA PENDIENTE DE UNA RECTA

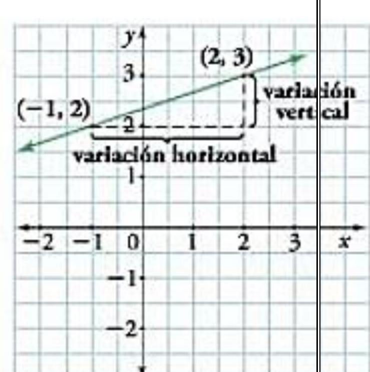


Gráfica 15

Es la razón entre la variación vertical y la variación horizontal entre cualquier par de puntos de la recta. La pendiente determina el grado de inclinación de la recta.

Si P_1 es un punto de coordenadas (x_1, y_1) y P_2 es un punto de coordenadas (x_2, y_2), se define la **pendiente** de una recta como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Gráfica 16

EJEMPLO: Calcular la pendiente de una recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(2,3)$ se tiene que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

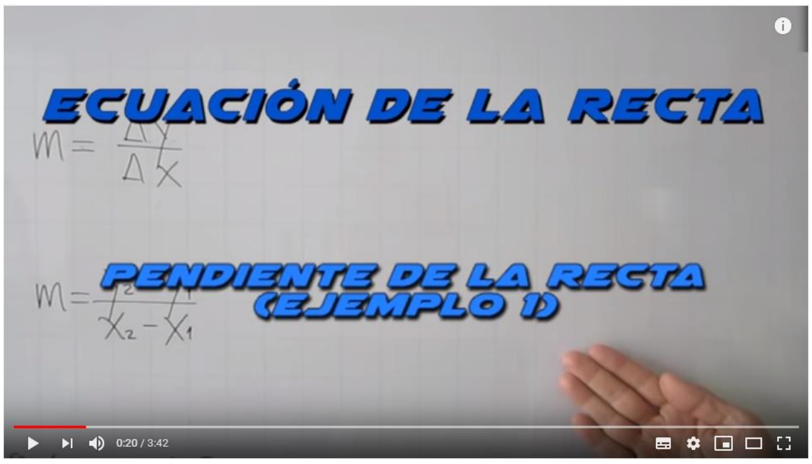


Figura 7

Ver el siguiente video sobre ecuación de la recta https://www.youtube.com/watch?v=ULxjPNTiAZ8

4.2.1.1. CLASIFICACIÓN DE LAS RECTAS SEGÚN SU PENDIENTE

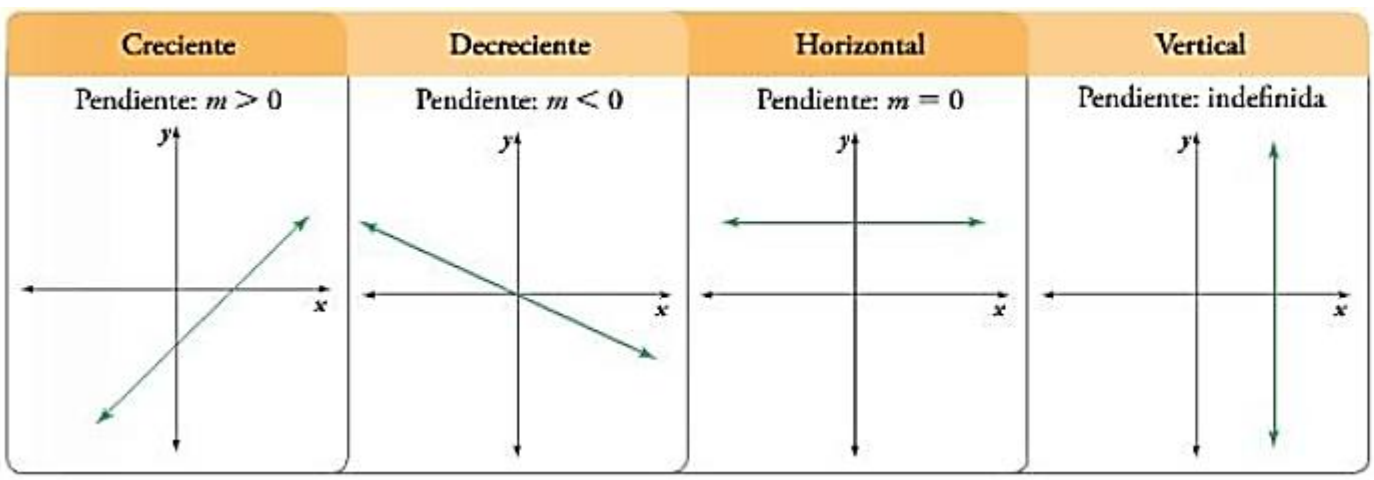
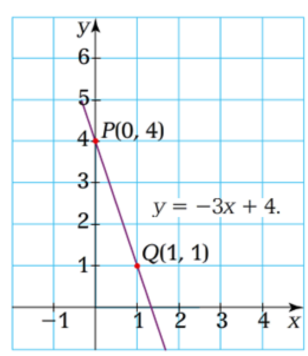


Tabla 8

4.2.2. ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA

Figura 8



Gráfica 17

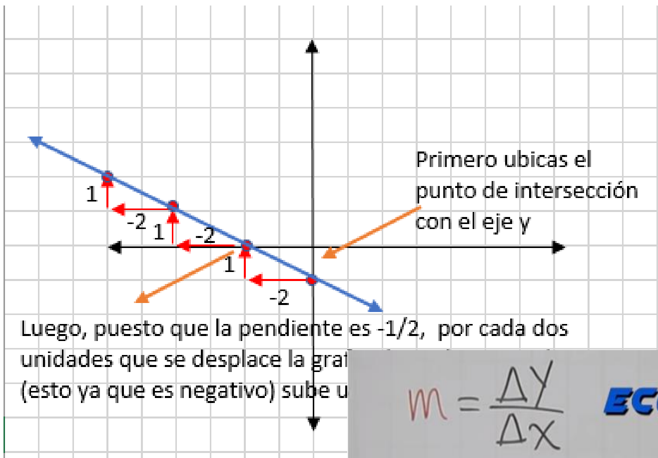
Ver el siguiente video sobre ecuación de la recta.
https://www.youtube.com/watch?v=GBSmycLgTeU&list=PLeySRPnY35dE1JAjLtnjoDTA5-oWq6m2w

La ecuación explicita de la recta es $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y, es decir la ordenada y para el punto en el cual $x = 0$ es decir, $(0, b)$.

Para hallar la ecuación explícita de una recta se deben considerar los siguientes casos:

1. Cuando de conocen la pendiente m y el intercepto con el eje y b

Es este caso, se remplaza el valor de m y b en la ecuación $y = mx + b$



EJEMPLO: Determina la ecuación de la recta con pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y $b = -1$ y graficar

$$y = \frac{1}{-2}x - 1$$

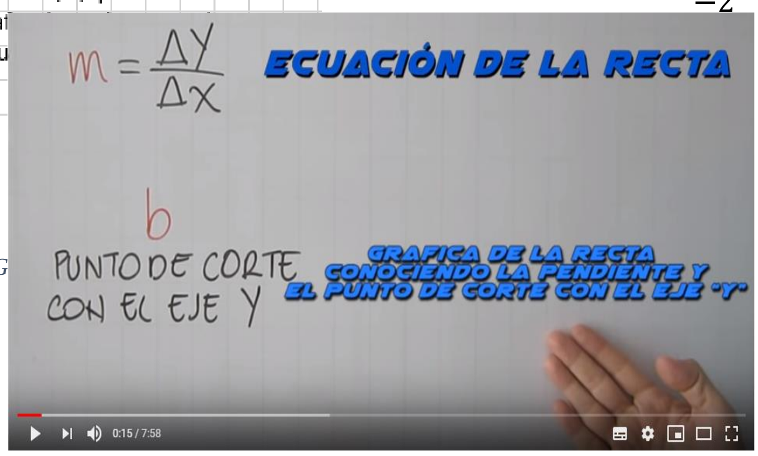


Figura 9

Ver el siguiente video sobre Ecuación de la recta. https://www.youtube.com/watch?v=9Gwpz1EPzqc

2. Cuando se conocen la pendiente y un punto.

Para hallar la ecuación de una recta, dados un punto y el valor de m: primero se reemplazan la pendiente y las coordenadas del punto dado en $y = mx + b$ para determinar el valor de b. y luego se reemplazan m y b en la ecuación.

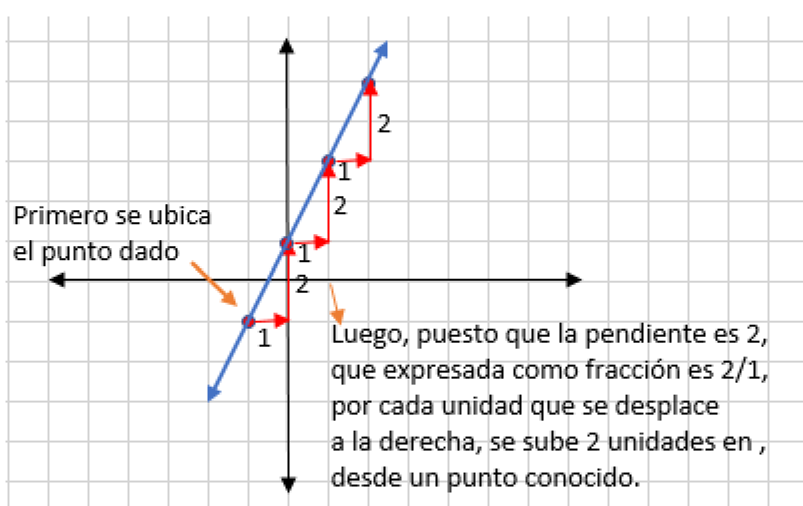
EJEMPLO: Determina la ecuación de la recta con pendiente $m = 2$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$ y graficar

Reemplazamos la pendiente $m = 2$ y el punto $\left(\overbrace{-1}^{x}, \overbrace{-1}^{y}\right)$ en la ecuación:

$$y = mx + b$$
$$(-1) = 2(-1) + b$$

Despejamos b:

$$(-1) = -2 + b$$
$$(-1) + 2 = b$$
$$1 = b$$



Gráfica 19

Finalmente, escribimos la ecuación:

$$y = 2x + 1$$

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017

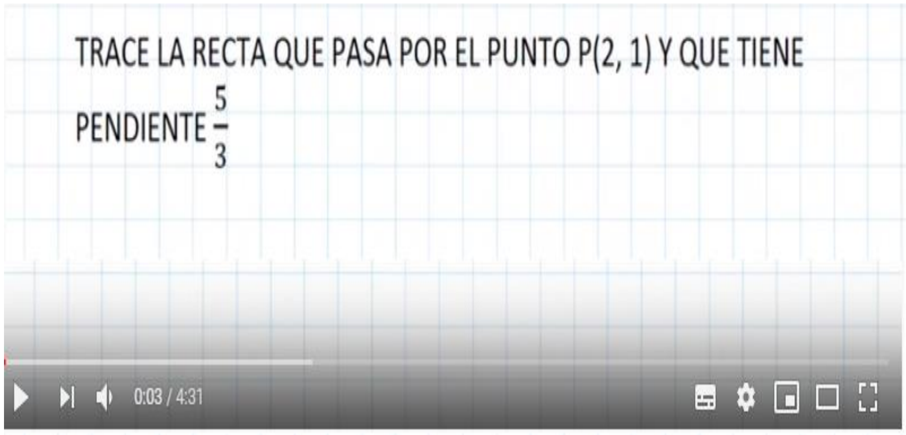
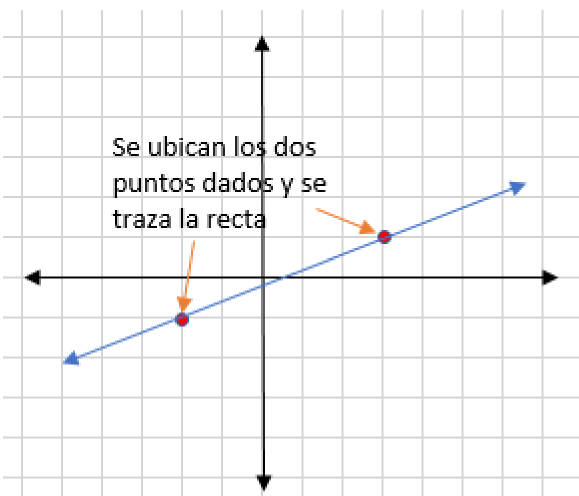


Figura 10

Ver el siguiente video sobre un ejercicio práctico de recta que tiene pendiente.
https://www.youtube.com/watch?v=9gBzlbr8_LU

3. Cuando se conocen dos puntos

Primero se halla la pendiente mediante la fórmula con las coordenadas de los dos puntos. Luego, con la pendiente m y cualquiera de los puntos conocidos, se halla el valor de b en la ecuación $y = mx + b$ y se procede igual que en el caso anterior.



Gráfica 20

EJEMPLO: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2,-1)$ y $(3,1)$ y graficar

Hallamos la pendiente siendo $\left(\overbrace{-2}^{x_1},\overbrace{-1}^{y_1}\right)$ y $\left(\overbrace{3}^{x_2},\overbrace{1}^{y_2}\right)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-1)}{3-(-2)} = \frac{2}{5}$$

Reemplazamos la pendiente $m = \frac{2}{5}$ y alguno de los dos puntos dados, en este caso vamos a sustituir el punto $\left(\overbrace{-2}^{x},\overbrace{-1}^{y}\right)$ en la ecuación:

$$y = mx + b$$
$$(-1) = 2(-2) + b$$

Despejamos b:

$$(-1) = -4 + b$$
$$(-1) + 4 = b$$
$$3 = b$$

Finalmente, escribimos la ecuación:

$$y = \frac{2}{5}x + 3$$

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017

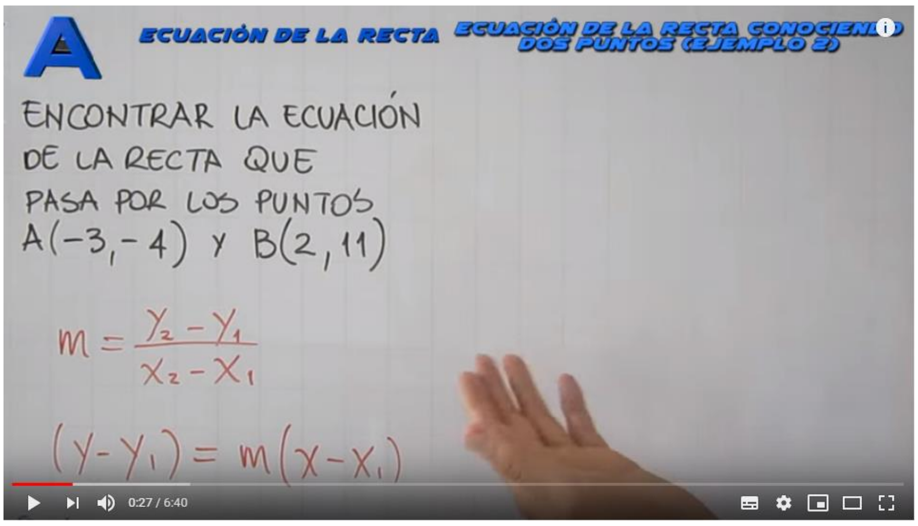
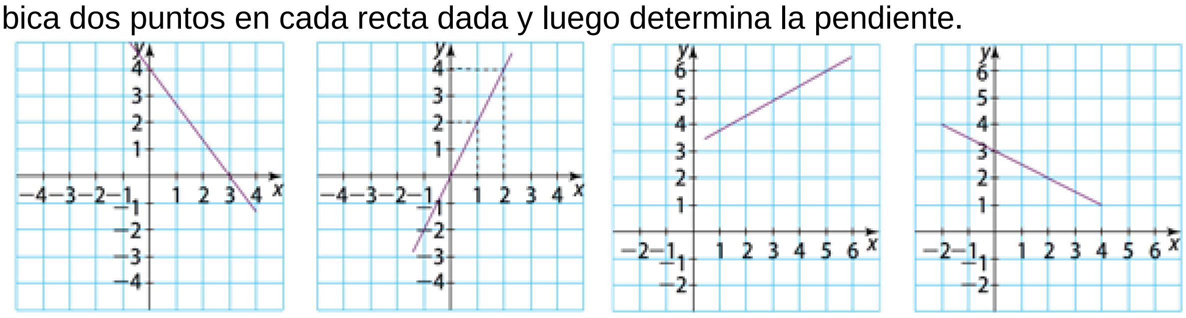


Figura 11

Ver el siguiente video sobre ecuación de recta que pasa por dos puntos. https://www.youtube.com/watch?v=tWjvvpSs8RM

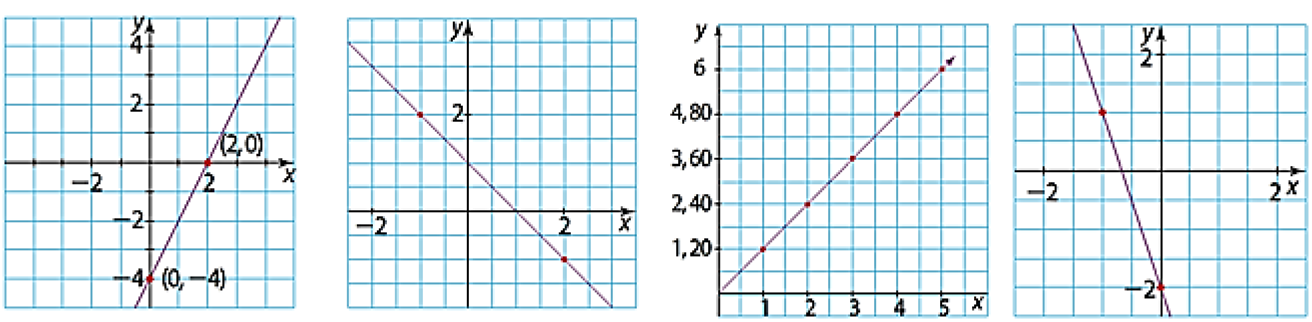
4.2.3. ACTIVIDAD PERSONAL 3

1. Ubica dos puntos en cada recta dada y luego determina la pendiente.



Gráfica 21

2. Halla la ecuación explicita de cada recta a partir de su gráfica



Gráfica 22

3. Identifica la pendiente y el intercepto en cada expresión y realiza la grafica correspondiente a cada una.
   a. $y = 5 - 3x$
   b. $y = 7x + 4$

4. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto Q y tiene pendiente m y graficarlas

   $Q(1, 2)$ y $m = 3$ $\quad$ $Q(-1, 5)$ y $m = 6$

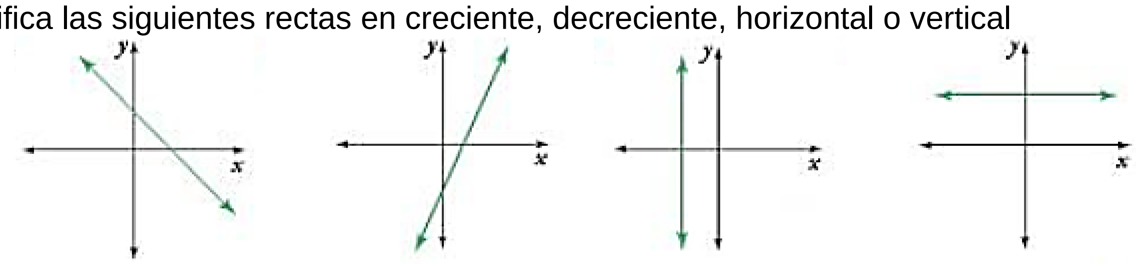
   $Q(-2, 0)$ y $m = 4$ $\quad$ $Q(10, -3)$ y $m = -4$

5. Halle la ecuación de la recta a partir de la pendiente y el intercepto dados y graficarlas
   a. $m = 1 \ y \ b = 0$
   b. $m = 2 \ y \ b = -3$
   c. $m = -3 \ y \ b = -2$

d. $m = \frac{1}{3}\ y\ b = 3$

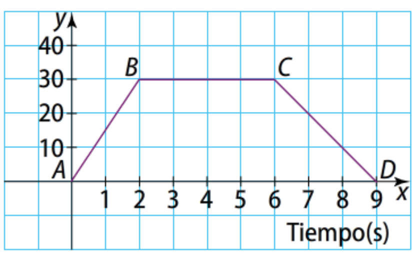
6. Encuentra la ecuación de la recta que se indica en cada caso.
   a. Tiene intercepto con el eje y en (0,4) y pendiente igual a 3.
   b. Pasa por los puntos $\left(1, \frac{4}{5}\right)$ y $(-2, -3)$
   c. Tiene intercepto con el eje y en b=4 y pasa por $(1, -1)$

7. Clasifica las siguientes rectas en creciente, decreciente, horizontal o vertical



Gráfica 23

8. Observa la siguiente gráfica que representa el movimiento de un vehículo a velocidad constante. Luego, responde.



Gráfica 24

El segmento $\overline{AB}$ muestra que a los 2 seg. de haber iniciado el movimiento, el vehículo recorrió 30 m. El segmento $\overline{BC}$ indica que entre 2 seg. y 6 seg. el vehículo no se movió. El segmento $\overline{CD}$ indica que entre 6 seg. y 9 seg. el vehículo retrocedió 30 m para volver al punto de partida.

a. ¿Cuál es la pendiente de los segmentos que indican cada parte del recorrido?
b. ¿Qué relación existe entre el valor del signo y la pendiente con la descripción del movimiento?

9. Una empresa de transportes establece sus tarifas de la siguiente manera: \$800 por Km recorrido y \$1.000 por paquete o maleta.

Distancia (km)	100	150	200	250	300	350
Precio (\$)						

Tabla 9

a. Completa la tabla si solo se lleva una maleta
b. Escribe la ecuación que relaciona la distancia y el precio de traslado
c. Construye la gráfica de la función

10. Para hacer un viaje se preguntó en dos agencias de alquiler de vehículos cuáles eran sus tarifas por kilómetro recorrido.

Agencia de viajes Cóndor: cobra un valor fijo de \$95.000 y \$5.000 por km recorrido.

Agencia de viajes Autocar: cobra un valor fijo de \$80.000 y \$6.000 por km recorrido.

Figura 12

a. Halla la ecuación que representa la relación entre la cantidad de kilómetros recorridos y el precio en cada agencia.
b. Grafica ambas rectas y halla su punto de intersección.
c. Determina cuál de las dos ofertas es mejor si el recorrido del viaje es 100 km. Justifica tu respuesta

11. En un curso de baile cobran \$60.000 la inscripción y \$30.000 la hora
   a. ¿Cuál es la ecuacion de la recta que relaciona la cantidad de horas con el costo del curso?

b. ¿Cuánto debe pagar una persona por 15 horas de clase?
c. Si paga $660.000 ¿Cuántas horas de clase recibió?

4.3. FUNCIONES CUADRATICAS

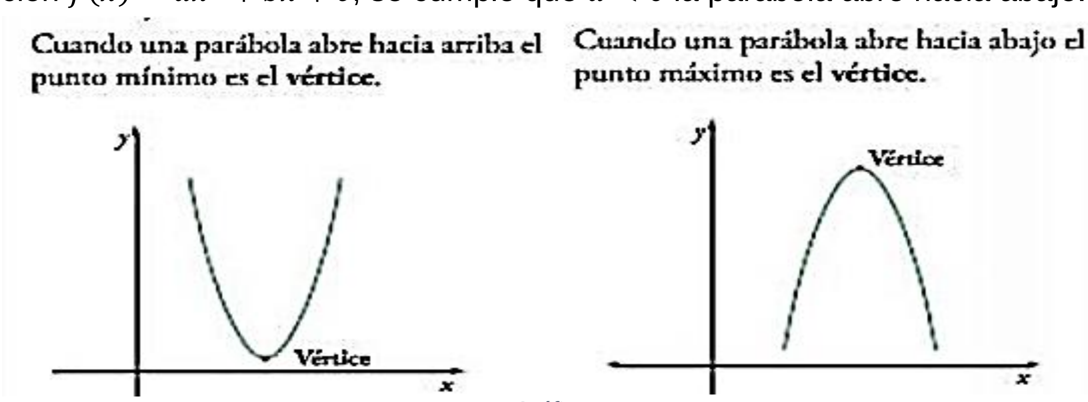
Es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c $\in \mathbb{R}$ y $a \neq o$

Por ejemplo, las funciones $g(x) = 7x^2 + 3x + 1, f(x) = -3x^2 + 8x$ y $h(x) = -4x^2$ son funciones cuadráticas. A las funciones cuadráticas también se les denomina funciones de segundo grado porque el exponente del término ax^2 es 2.

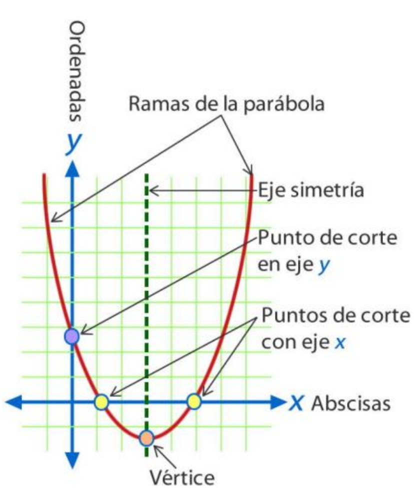
4.3.1. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola, la cual puede abrir hacia arriba o hacia abajo.

Si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se cumple que $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. En cambio, si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se cumple que $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.



Gráfica 25



Gráfica 26

Las coordenas del vértice V se representa (h, k) y se determinan mediante las expresiones $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los numeros reales $\mathbb{R}$, y el rango es el intevalo $[k, +\infty)$ si la parábola abre hacia arriba, o es $(-\infty. k]$ si la parábola abre hacia abajo.

La recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, se denomina **eje de simetría**.

Para hallar el intercepto de la parábola con el eje y, se remplaza $x = 0$ en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, y para hallar los interceptos con el eje x o tambien denominados los ceros o raices de la función cuadrática se remplaza $y = 0$.
Para determinar los cortes con el eje x o tambien denominados los ceros o raices de la función cuadrática se remplaza $y = 0$. Por tanto, queda la siguiente expresión

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

La cual se puede resolver o factorizando o con la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, son $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

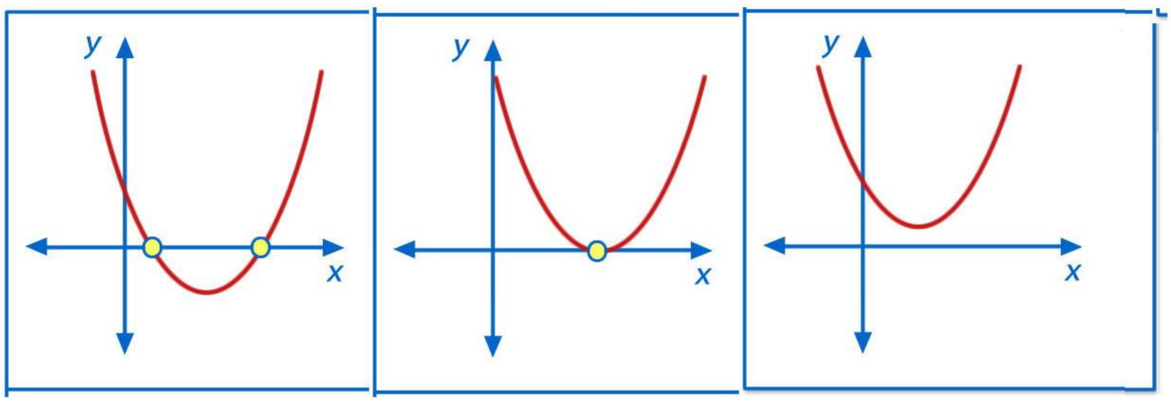
Para efecto de este curso, lo haremos aplicando la formula general.

Dependiendo de que los puntos de corte existan o no existan, se presentan tres casos:

Caso 1. La parábola corta el eje x en un solo punto.
En este caso, el vértice de la parábola está sobre el eje x y por esto la función tiene una única solución real.

Caso 2. La parábola corta el eje x en dos puntos.
En este caso la función tiene dos raíces reales diferentes.

Caso 3. La parábola no corta el eje x.
En este caso la función no tiene solución en los números reales.



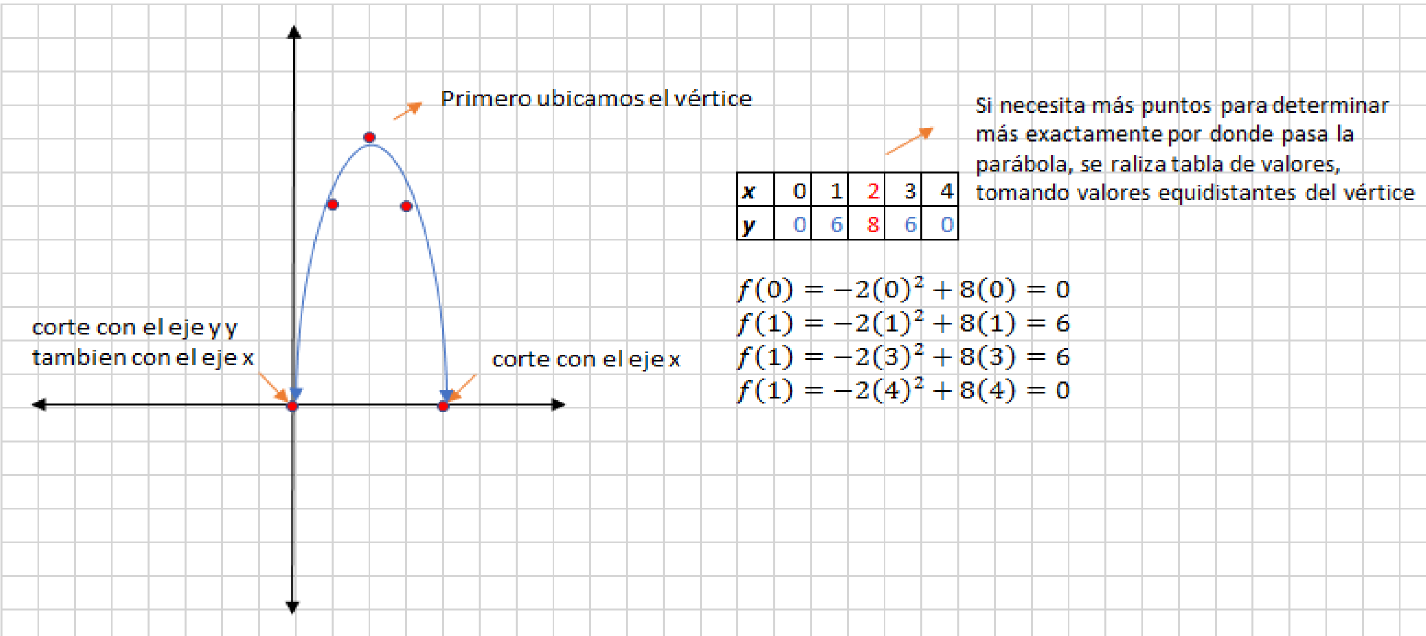
Gráfica 27

EJEMPLO: Grafica la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 8x$ determinando todos los elementos, e indicando el dominio y rango

1. Identificamos los coeficientes: $f(x) = \overbrace{-2}^{a}x^2 + \overbrace{8}^{b}x + \overbrace{0}^{c}$
2. Determinamos el vértice (h, k) mediante las expresiones $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
   $h = -\dfrac{8}{2(-2)} = \dfrac{-8}{-4} = 2$
   $k = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(2) = -2(2)^2 + 8(2) = 8$
   vértice $(2, 8)$
3. Hallamos el corte con el eje y, haciendo a x=0
   $f(x) = -2x^2 + 8x$
   $f(0) = -2(0)^2 + 8(0) = 0$
   corte con el eje y: $(0, 0)$
4. Hallamos los cortes con el eje x (si los hay), haciendo a y=0 y aplicando la formula
   $\overbrace{-2}^{a}x^2 + \overbrace{8}^{b}x + \overbrace{0}^{c} = 0$
   $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
   $x_1 = \frac{-8+\sqrt{8^2-4(-2)0}}{2(-2)} = 0$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-8-\sqrt{8^2-4(-2)0}}{2(-2)} = 4$

   corte con el eje x: $(0, 0)$ y $(4, 0)$

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017



Gráfica 28

Dom f: $\mathbb{R}$
Rango $(-\infty. 8]$

Para ampliar más sus conocimientos puedes observar el siguiente video
https://www.youtube.com/watch?v=J3qQWvxqFI4

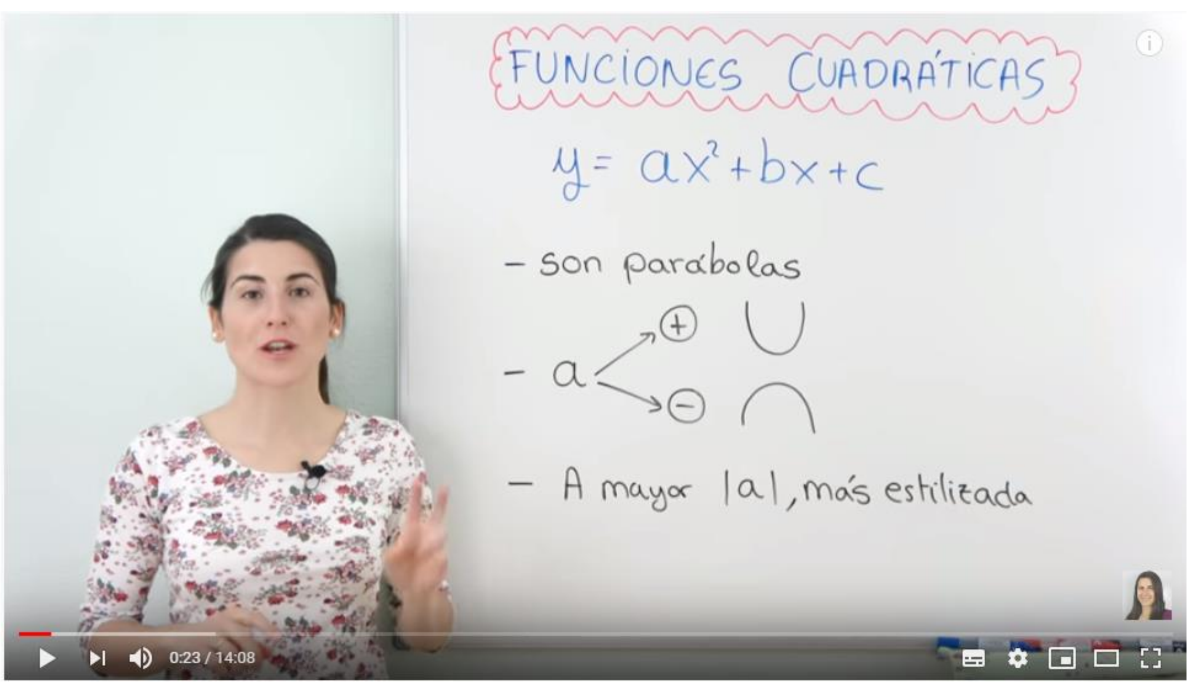


Figura 13

4.3.2 ACTIVIDAD PERSONAL 4

1. Identifica cuáles de las siguientes expresiones representan funciones cuadráticas. Justifica tu respuesta.

$h(x) = x^2$ $\quad$ $w(x) = 3x + 4$

$n(t) = 2t$ $\quad$ $t(y) = 5y^3 + \frac{7}{4}y^2$

$p(r) = \frac{2}{4}r^2$ $\quad$ $m(x) = x + \frac{7}{4}x^2$

$q(y) = 2y^3$ $\quad$ $t(x) = \sqrt{2} + x^2 - x$

2. Grafica las siguientes funciones cuadráticas determinando todos los elementos, e indicando el dominio y rango

   $y = -x^2$ $\quad$ $y = -x^2 - 1$

   $y = 2x^2$ $\quad$ $y = x^2 - x$

   $y = x^2 + 1$ $\quad$ $y = \frac{3}{4}x^2 - x$

   $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ $\quad$ $y = -x^2 + 5x + 2$

   $y = x^2 + 7x + 1$

3. La expresión para calcular la distancia que recorre un objeto cuando se deja caer a una determinada altura es $d(t) = 4{,}9t^2$, donde $d(t)$ es la distancia en metros y t es el tiempo en segundos. Si se deja caer una piedra a una altura de 49 m, ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

4. La altura h en metros, que alcanzó un balón al lanzarlo hacia arriba, está dada por la expresión $h(t) = -t^2 + 0{,}6t + 0{,}7$, donde t es el tiempo en segundos. ¿A los cuántos segundos el balón se encontró a 0,3 metros de altura?

5. En una competencia de saltos, la altura de los saltos está determinada por la función $h(t) = -2t^2 + 8t$, $h(t)$ medida en metros, donde t es el tiempo en segundos que dura el salto.
   a. Calcula la altura que alcanza el deportista a los 3 segundos
   b. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el deportista? ¿a los cuantos segundos sucedió esto?
   c. ¿Cuánto tiempo duró el deportista en el aire?

4.4 TEOREMA DE THALES

4.4.1 THALES DE MILETO

Thales (o Tales) nació hacia el 625 a. C. en Mileto, una de las primeras ciudades fundadas por los griegos a orillas del mar Egeo, la cual en esa época era una de las más ricas y evolucionadas de esa zona. Actualmente pertenece a Turquía.

Thales era considerado como uno de los siete sabios de Grecia, estudioso y solitario, se destacó en las áreas del comercio, filosofía, astronomía y matemáticas. Sus reflexiones trataban sobre la naturaleza y el origen del mundo físico, preguntas como ¿De dónde venían todas las cosas? ¿De qué estaban hechas? ¿Existía algo que pudiera reducir a unidad el variado espectáculo del cosmos?, sus preguntas representaban el esfuerzo por ir más allá de las apariencias hasta descubrir la verdadera naturaleza de las cosas y su primer origen; lo que los griegos le llamaron el arjé. Siempre sus respuestas, trataba de apoyarlas en la razón.

4.4.2 ORIGEN DEL TEOREMA DE THALES

Hay muchas versiones de cómo sucedió la historia, aquí te contamos una de ellas; lo que hoy conocemos como el teorema de Thales, se origina cuando Thales viajó a Egipto para aprender matemáticas, hacia el año 600 a. C., se dice que estando allí, inventó un procedimiento para calcular la altura de las pirámides Keops por **semejanza**, esto lo pudo hacer midiendo la sombra de esta y la de su bastón. La **proporcionalidad** entre la altura de la pirámide y la del bastón, hacían posible calcular la altura deseada.

Para hacer este cálculo, supuso que los rayos del sol incidían paralelamente en la tierra, entonces la sombra que generaba la pirámide y su altura, forman un **triángulo rectángulo**, y la sombra del bastón con su altura otro. Estos dos triángulos rectángulos son **semejantes,** por lo tanto, pudo establecer la siguiente **proporción** para obtener la altura**.**

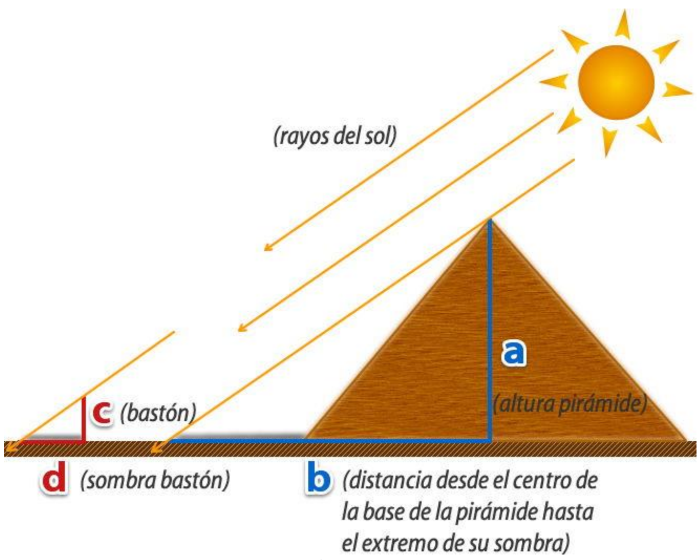


Figura 14

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \textit{Si despejamos a;} \quad a = \frac{c \cdot b}{d}$$

4.4.3 TEOREMA PARTICULAR DE THALES O FUNDAMENTAL DE LA SEMEJANZA.

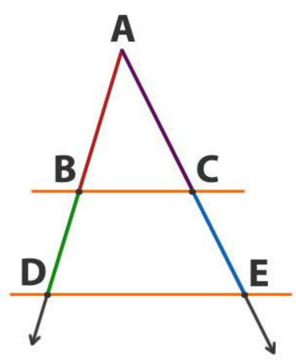
A raíz del concepto de semejanza basado en las proporciones entre la pirámide y su bastón, surge el "teorema fundamental de la semejanza entre triángulos", o también conocido como "teorema particular de Thales."

Este teorema trata sobre los segmentos proporcionales que son determinados por dos paralelas.

a. Primer enunciado:

Al cortar los lados de un ángulo cualquiera por dos paralelas, los segmentos de los lados del ángulo determinados por las paralelas son proporcionales.

$$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

Figura 15

Ejemplo: Si las rectas BC y DE son paralelas, determina el valor de x para la siguiente figura;

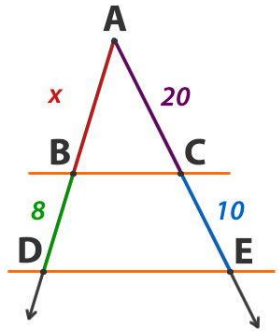


Figura 16

Aplicamos el teorema;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{20}{10}$$

$$x = 2 \cdot 8$$

$$x = 16$$

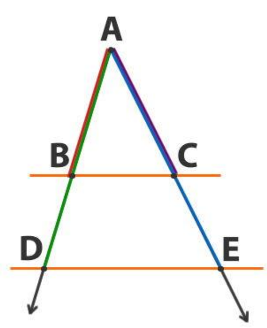
Respuesta: La recta AB (x) mide 16.

b. Segundo enunciado:

2

Al cortar los lados de un ángulo cualquiera por dos paralelas, los segmentos que se forman desde el vértice a los puntos de intersección de las paralelas son proporcionales entre sí.

$$\overline{BC} \ // \ \overline{DE}$$



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Figura 17

Ejemplo:

Si BC // DE y AD = 16, AE = 24 y AB = 2, determina el valor de la recta AC en la siguiente figura;

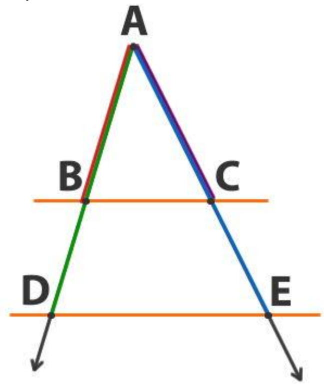


Figura 18

Aplicamos el teorema;

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{16}{2} = \frac{24}{x}$$

$$8x = 24$$

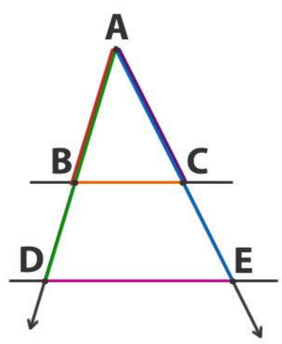
$$x = 3$$

Respuesta: La recta AC mide 3.

c. Tercer enunciado:

Al cortar los lados de un ángulo cualquiera por dos paralelas, éstas son entre sí como los segmentos medios desde el vértice a las paralelas.

$$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$$



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

Figura 19

Ejemplo: Determina el valor de x para que L_1 y L_2 sean paralelas;

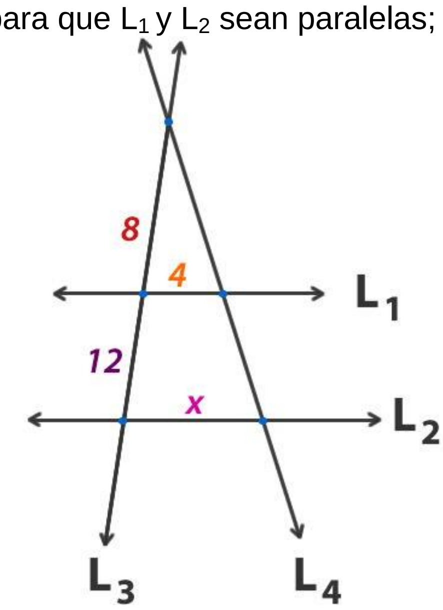


Figura 20

Hay ejercicios como este, que pueden parecer más difíciles, ya que el vértice y las intersecciones con las paralelas no tienen letras, pero si lees el enunciado del teorema, te darás cuenta que es igual de sencillo, observa;

Para determinar el valor de x suponemos que L_1 y L_2 son paralelas que cortan los lados del ángulo, entonces, definiremos los segmentos en L_3 desde el vértice a las paralelas (que es donde están los datos).

8 *Primer segmento desde el vértice a la paralela L_1*

$8 + 12 = 20$ *Segundo segmento desde el vértice a la paralela L_2*

Ahora escribimos la proporción, según el teorema;

$$\frac{1^{\circ}\,segmento}{2^{\circ}\,segmento} = \frac{L_1}{L_2}$$

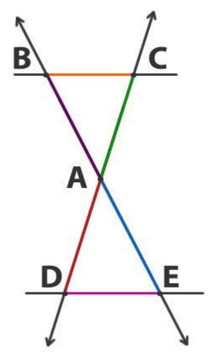
$$\frac{8}{20} = \frac{4}{x}$$

$$8x = 80$$

$$x = 10$$

Respuesta: El valor de x es 10.
- Este mismo teorema se aplica a paralelas que cortan las extensiones de los lados más allá del vértice, donde podemos aplicar la siguiente proporción;

$$\overline{BC} \,//\, \overline{DE}$$



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

Figura 21

Ejemplo:
Si $\mathbf{L_1 \,//\, L_2 \,//\, L_3}$ determina la medida de **a**.

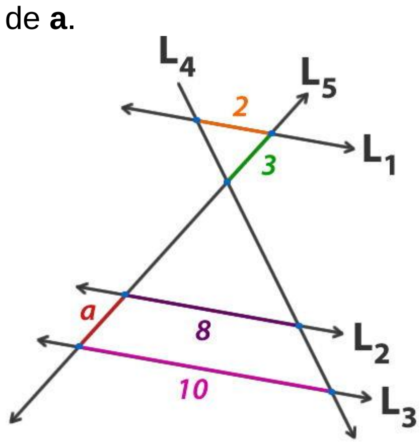


Figura 22

Para resolver este ejercicio, debemos aplicar el teorema de Thales en dos ocasiones y luego restar, para lo cual definiremos como **x** e **y**, los segmentos que vamos a calcular;

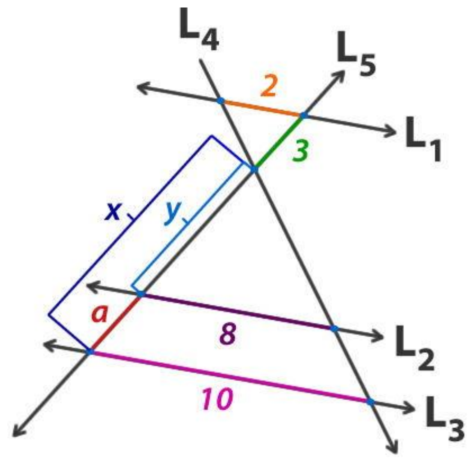


Figura 23

Escribimos las proporciones según el teorema y calculamos;

$$\frac{x}{3} = \frac{10}{2} \qquad \frac{y}{3} = \frac{8}{2}$$

$$2 \cdot x = 10 \cdot 3 \qquad 2 \cdot y = 8 \cdot 3$$

$$x = \frac{30}{2} \qquad y = \frac{24}{2}$$

$$\boxed{x = 15} \qquad \boxed{y = 12}$$

Ahora restamos para obtener la medida de **a**.

$$a = x - y$$

$$a = 15 - 12$$

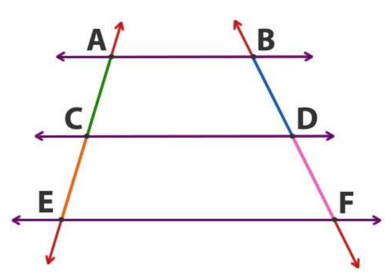
$$\boxed{a = 3}$$

Respuesta: La medida de ***a*** es 3.

4.4.4 TEOREMA GENERAL DE THALES

Al cortar dos o más rectas por tres o más paralelas, los segmentos determinados sobre las rectas son proporcionales entre sí.

$$\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \,//\, \overline{EF}$$



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$

Figura 24

Del teorema general de Thales, se pueden obtener también las siguientes proporciones;

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}$$

Ejemplo:
Si L_1 **//** L_2 **//** L_3, calcula **a** y **b,** si se sabe que **a + b = 15**

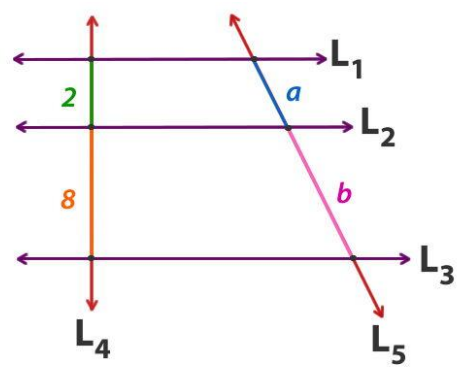


Figura 25

Establecemos la proporción para calcular b;

$$\frac{\overset{8+2}{10}}{8} = \frac{\overset{a+b}{15}}{b}$$

$$10b = 120$$

$$b = 12$$

Ahora como **a + b = 15**, reemplazamos b y obtenemos el valor de **a**;

$$a + b = 15$$

$$a + 12 = 15$$

$$a = 3$$

Respuesta: a = 3 y b = 12.

4.4.5 TEOREMA RECÍPROCO DE THALES.

Si dos o más rectas determinan segmentos proporcionales sobre dos transversales, entonces las rectas son paralelas entre sí. Es decir, es el inverso a los teoremas de Thales.

Ejemplos;

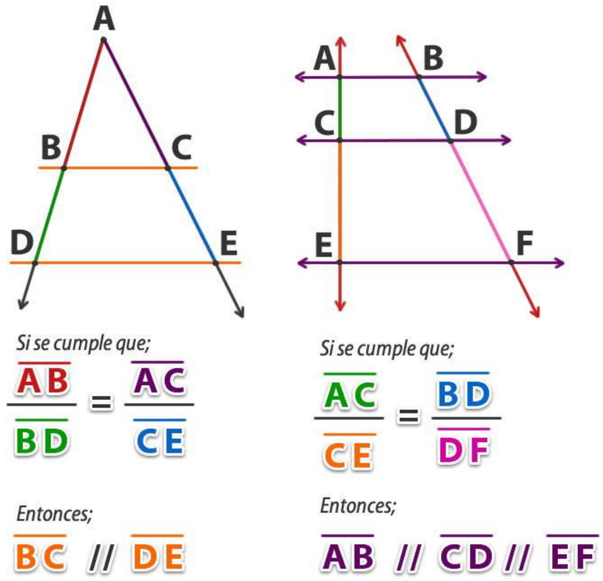


Figura 26

El teorema recíproco se cumple para todos los teoremas de Thales.
Dato: Recuerda que las aplicaciones del tema de Thales, nos sirven para resolver problemas de la vida cotidiana, especialmente para distancias inaccesibles, o que son muy difíciles de medir.

Ejemplo:
Nicolás mide **1,50 m**. de altura, se encuentra a **1,20 m**. de un poste que tiene encendida su luminaria a **3 m**. del suelo, ¿cuál es el largo de la sombra que proyecta Nicolás?

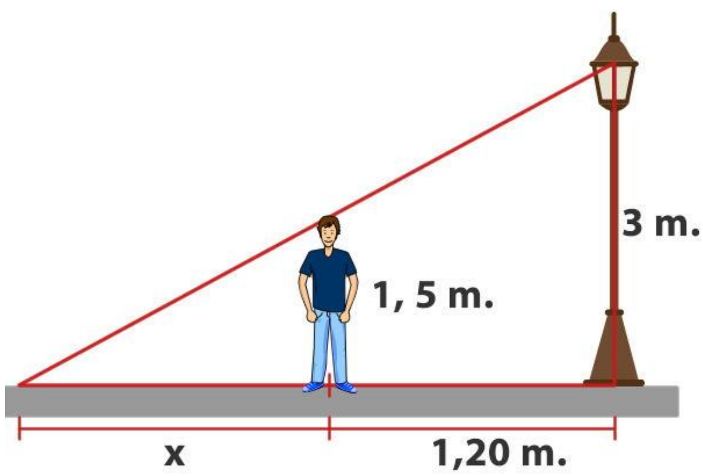


Figura 27

Aplicamos el teorema de Thales;

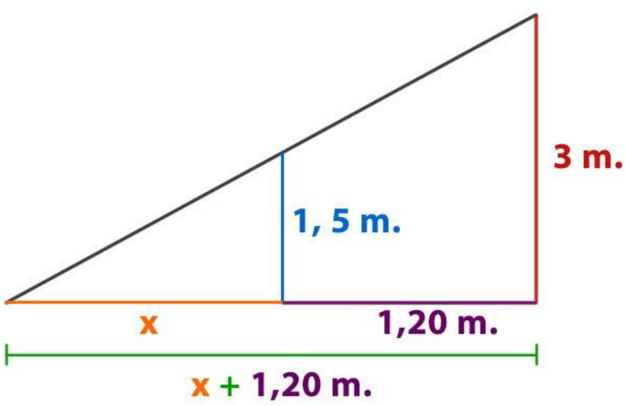


Figura 28

Respuesta: El largo de la sombra que proyecta Nicolás es de 1,20 m.

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017

Para mayor comprensión del tema, observar el siguiente video sobre teorema de tales
https://www.youtube.com/watch?v=WhrDNe8-TQ0

Figura 29

4.4.6 ACTIVIDAD PERSONAL 5

1) Escriba cinco proporciones entre los segmentos que aparecen en cada figura.

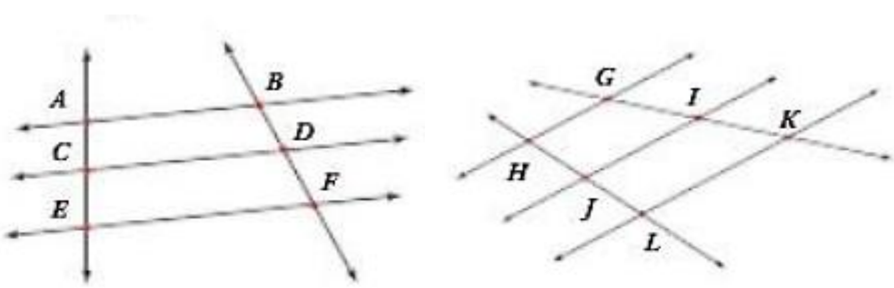


Figura 30

2) Determina el valor de x de acuerdo con las medidas que se indican. Si AD ll BE ll CF.

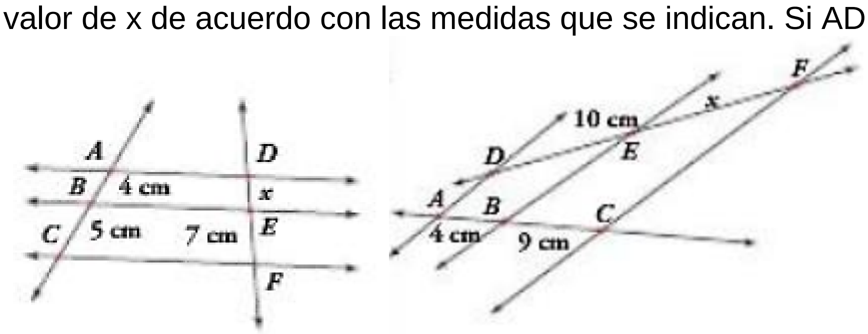


Figura 31

3) En el gráfico se tiene que $\overline{GN}, \overline{HM}, \overline{IL},$. Determine la medida de $\overline{ML}$ teniendo en cuenta las condiciones dadas para caso.

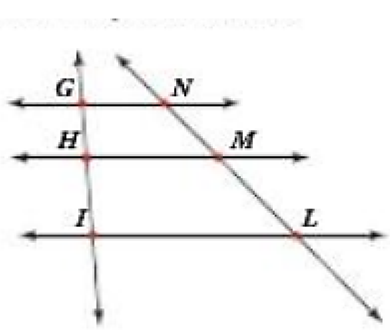


Figura 32

a)

$GI = 15$ cm

$HI = 6$ cm

$MN = 12$ cm

$GI = 12$ cm

$MN = 7{,}5$ cm

$\frac{GH}{HI} = \frac{1}{2}$

b)

4) Determina el perímetro de un lote como el que se indica en la figura, si se sabe que se dividió en tres partes, por medio de perpendiculares a uno de sus lados.

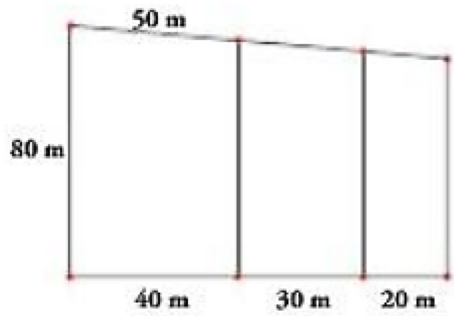


Figura 33

5) En el ΔABC, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Completa las proporciones indicadas.

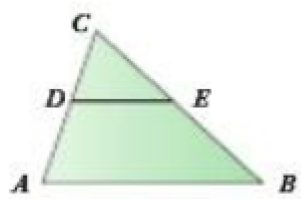


Figura 34

$$\frac{CD}{DA} = \frac{\square}{EB} \qquad \frac{CA}{DA} = \frac{\square}{BE}$$

6) En la siguiente figura $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$.
AC= 8 cm, BC = 2 cm y EF = 3 cm. Halle la medida de $\overline{DE}$.

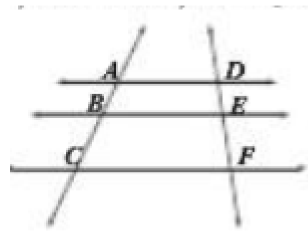


Figura 35

7) En el ΔFGH , $\measuredangle FIJ \cong \measuredangle JGH$, encuentre el valor que se indica en cada caso.

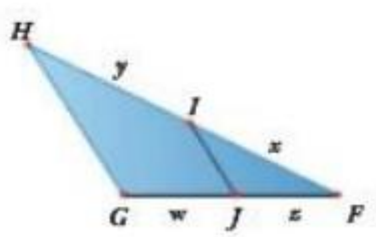


Figura 36

$z = 6$ cm	$x + y = 19$ cm
$w = 14$ cm	$y = 10$ cm
$x = 9$ cm	$z + w = 38$ cm
$y =$ ____ cm	$w =$ ____ cm

4.5 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos **polígonos son semejantes** si tienen la misma forma, sus **ángulos son respectivamente iguales** (congruentes) y sus **lados proporcionales**. Es decir, uno de los polígonos es una ampliación o reducción de la otra.

Ver el siguiente video sobre semejanzas. https://www.youtube.com/watch?v=YSFqfBKyN8c

Figura 37

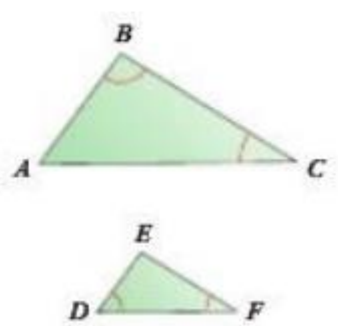


Figura 38

Teorema fundamental para la existencia de triángulos semejantes

Si aplicamos el teorema de fundamental de la semejanza o teorema particular de Thales en un triángulo podemos ver que toda paralela a un lado de un triángulo determina dos triángulos semejantes entre sí, ya que sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

Ejemplo: Dado un triángulo **ABC**, si se traza un segmento paralelo **DE** a al lado **BC**, se obtiene otro triángulo **ADE**, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo **ABC**.

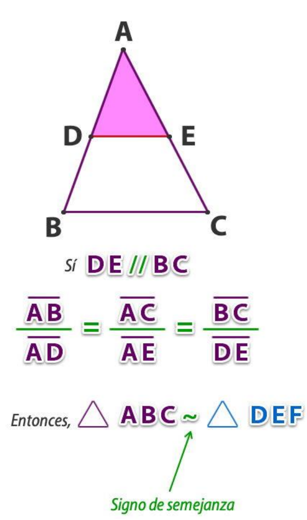


Figura 39

4.5.1 CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para determinar la semejanza entre dos polígonos cualesquiera, estos se descomponen

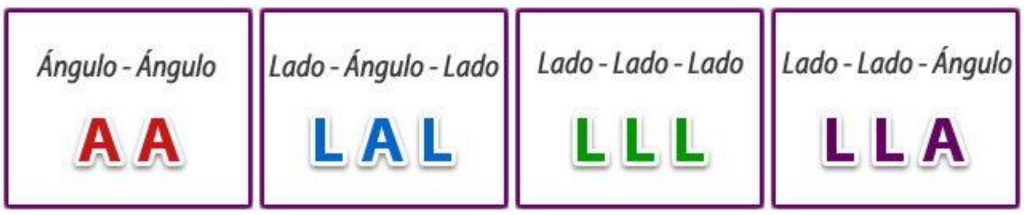
en triángulos y se verifica la semejanza entre los triángulos que los forman.

Se llaman **Criterios de Semejanza de dos triángulos**, a un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, tendremos la seguridad de que los triángulos son semejantes.

Ver el siguiente video sobre semejanza de triángulos.
https://www.youtube.com/watch?v=g_c0c1b4rlA

Figura 40

Esos **criterios o casos** son:



a. Criterio ángulo - ángulo (AA):
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales (congruentes).

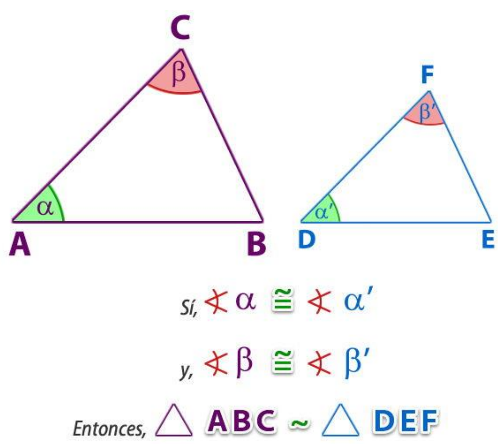


Figura 41

b. Criterio Lado - Ángulo - Lado (LAL):
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e iguales el ángulo comprendido entre ellos.

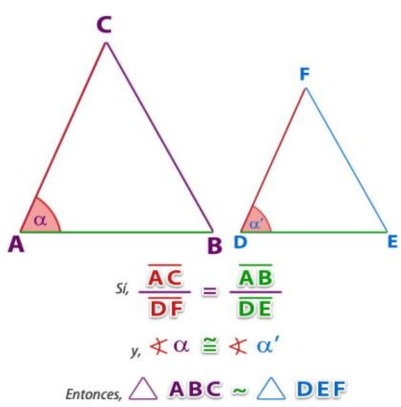
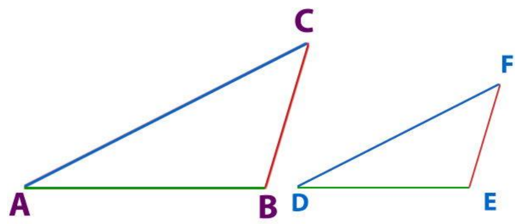


Figura 42

c. Criterio Lado - Lado - Lado (LLL):
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

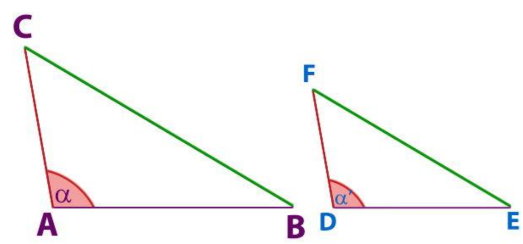


$$\text{Sí, } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$$

$$\text{Entonces, } \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Figura 43

d. Criterio Lado - Lado - Ángulo (LLA):
Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos son respectivamente iguales.



$$\text{Sí, } \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$$

$$\text{y, } \measuredangle \alpha \cong \measuredangle \alpha'$$

$$\text{Entonces, } \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Figura 44

Ejemplo:
Los triángulos ABC y DEF son semejantes, si AB = 6, BC = 12, DE = 10 y DF = 7,5. Determina el valor de AC + EF.
Dibujamos los triángulos y anotamos los datos, designamos a AC = x y EF = y.

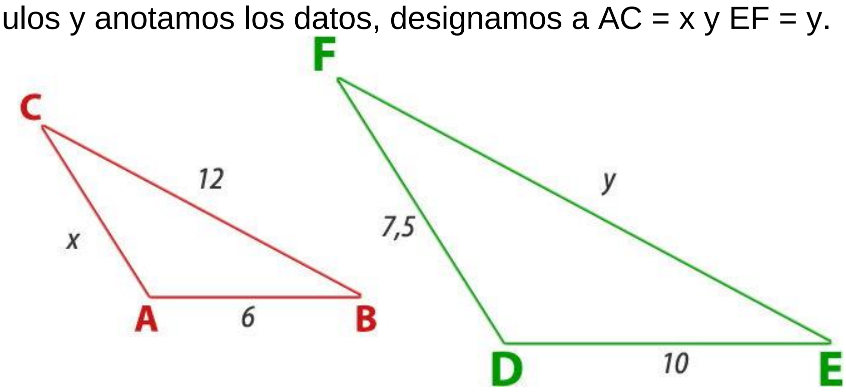


Figura 45

Para resolver este ejercicio, podemos ocupar el criterio de semejanza de triángulos LLL, entonces diremos que;

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$$

Reemplazamos con los datos y resolvemos x e y por separado;

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} \qquad \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{7,5}{x} \qquad \frac{10}{6} = \frac{y}{12}$$

$$x = \frac{45}{10} \qquad y = \frac{120}{6}$$

$$x = 4,5 \qquad y = 20$$

Sumamos;

$$x + y = 24,5$$

Respuesta: AC + EF = 24,5.

4.5.2 ACTIVIDAD PERSONAL 6

1) Determina el criterio que permite establecer la semejanza entre cada par de triángulos. Justifica tu respuesta.

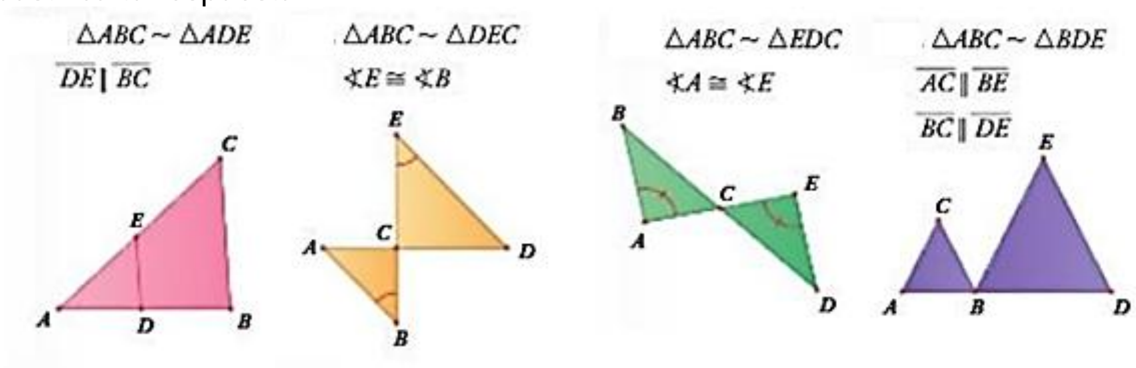


Figura 46

2) Comprueba la semejanza de los triángulos. Luego calcula el valor de x

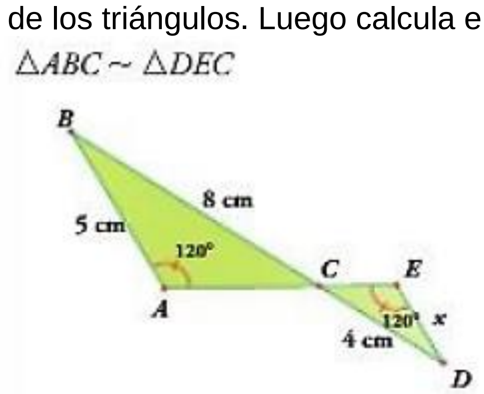


Figura 47

3) Determina la altura que tiene la escalera para subir al avión.

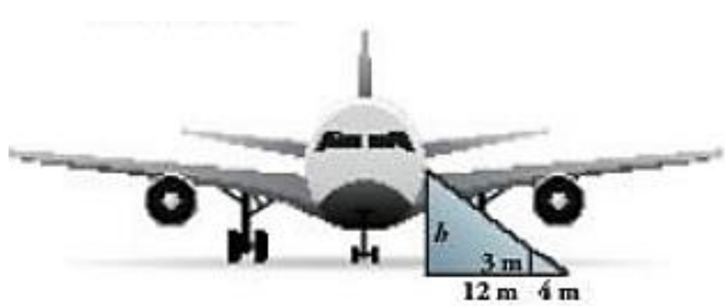


Figura 48

4) Calcula el ancho del río a partir del esquema que se muestra en la figura sabiendo que en los triángulos formados los lados DE y AB son perpendiculares a AE

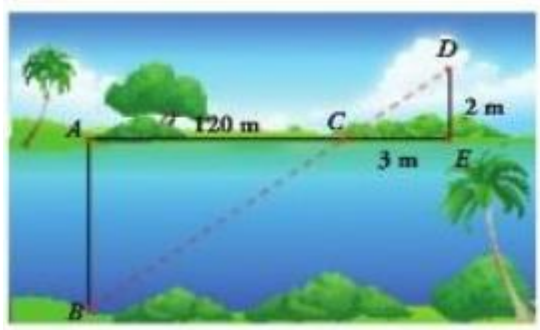


Figura 49

4.6 TECNICAS DE CONTEO

Las técnicas de conteo son herramientas que se utilizan para encontrar el número de elementos del espacio muestral de acuerdo con las características que tenga una muestra.

4.6.1 CLASES DE MUESTRA

Dado un experimento aleatorio y una muestra de él se pueden representar dos criterios para clasificar dicha muestra que son: el orden y la repetición

Se dice que una muestra tiene repetición cuando para formarla se puede repetir varias veces el mismo elemento de la población.

Se dice que una muestra tiene orden si al conformarla es importante el orden en el que se ubiquen los elementos de la población.

EJEMPLO:

Un profesor tiene que elegir a dos estudiantes de un grupo de tres candidatos, para representar al colegio en las olimpiadas. Los candidatos son Felipe, Martha y Lucía. Determinar cuál es la población y cuál es la muestra.

En este caso, la población del experimento está forma formada por los tres candidatos, así que N = 3; además, el profesor debe escoger dos de esos tres estudiantes, por tanto, la muestra n = 2. Ya que un estudiante no puede ocupar dos de los cupos disponibles, se dice que la muestra no tiene repetición.

Si el experimento se realiza eligiendo uno a uno los tres estudiantes, no importa si es elegido de primero o de segundo, ya que al final, va a ocupar uno de los tres cupos disponibles para representar al colegio en la prueba. La muestra, entonces, no tiene orden.

4.6.2 PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si en un experimento aleatorio se tiene una población de tamaño N y una muestra de tamaño n en la cual hay orden y repetición, entonces, el número de elementos del experimento #(S) se expresa como $\#(S) = N^n$

EJEMPLO:

Determinar cuántos resultados se pueden obtener al lanzar cuatro monedas al aire de una vez.

Primero, se determina N. Como los elementos con los cuales se construirá el espacio muestral son dos: cara y sello, se tiene que N =2.

Luego, se determina n. Para ello, es útil construir un elemento del espacio muestral, así: (cara, cara, sello, sello) es un elemento del espacio muestral, por tanto, n = 4

En este experimento hay orden y repetición, por tanto, el número de elementos del espacio muestral es #(S) = 2^4 = 16

Entonces, el número de resultados al lanzar las cuatro monedas es 16.

4.6.3 PERMUTACIONES

Dado un experimento aleatorio con población N y muestra n en donde la muestra, tiene orden, pero no repetición, el número de elementos del espacio muestral se determina a partir de la permutación de n en N, que está dado por:

$_NP_n=\frac{N!}{(N-n)!}$

Donde N!= Nx(N-1) x(N-2)x…x2x1 y 0!=1

La permutación es una operación definida en los números naturales y para la cual es necesario que $n \leq N$. Además, el resultado de toda permutación es un número natural.

EJEMPLO:

Determinar la muestra, la población y el número de elementos del espacio muestral del siguiente experimento aleatorio.

Un empleado de una tienda femenina debe organizar la vitrina del almacén. El administrador le pide que vista tres maniquíes con cuatro vestidos de la última colección. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Figura 50

Se puede afirmar que N = 4 y n=3. En n se dice que hay orden pues es diferente poner el vestido 1 en el maniquí 2, que en el maniquí 3. Además, no hay repetición pues el mismo vestido no se le puede poner a dos maniquíes distintos.

Así que el número de elementos del espacio muestral está dado por:

$$_4P_3 = \frac{4!}{(4-3\,)\text{¡}} = \frac{4\,x\,3\,x\,2\,x\,1}{1!} = 24$$

Luego, el empleado tiene 24 opciones diferentes de poner los cuatro vestidos en los tres maniquíes.

EJEMPLO:

Una prueba de admisión para un colegio de la ciudad pide a un niño que forme un número de dos cifras diferentes, usando cuatro fichas con los números 1,2,5 y 7. Cuántos números distintos puede formar el niño en la prueba?

Figura 51

Primero se determina N y n.

En este caso N = 4, porque hay cuatro fichas y n = 2, porque los números que debe formar el niño deben tener dos cifras.

Segundo por las condiciones del problema se puede determinar que en la muestra hay orden, pues es un conjunto numérico y no hay repetición, ya que en el experimento se aclara que los dígitos deben ser diferentes.

Luego, se aplica la fórmula de permutaciones para calcular el número de elementos del espacio muestral, así:

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1}{2 \, x \, 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Luego, el niño puede formar 12 números en la prueba con esas cuatro fichas.

EJEMPLO:

Para la elección de la junta directiva del Consejo de propietarios de un conjunto residencial se han postulado siete candidatos. En los estatutos de la junta de administración del conjunto se ha estipulado que una vez realizada la elección, el candidato con mayor votación será el presidente, el segundo en número de votos será el tesorero y el tercero será el secretario. De cuántas maneras distintas se puede conformar la junta directiva del Consejo de propietarios?

Figura 52

Para este caso se determina que N = 7, ya que son siete candidatos, y n = 3, ya que son tres personas que se deben elegir. En la muestra hay orden, pues no es igual quedar de primero, de segundo o de tercero; además no hay repetición, pues la misma persona no puede ocupar dos cargos. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que:

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)¡} = \frac{7\,x\,6\,x\,5\,x\,4!}{4!} = 210$$

En conclusión, hay 210 formas distintas de conformar el Consejo con los siete candidatos disponibles.

4.6.4 COMBINACIONES

Dado un experimento aleatorio con una población N y una muestra n sin orden ni repetición, se dice que el número de elementos del espacio muestral es la combinatoria de n en N, así:

$${}_NP_n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

EJEMPLO:

Para la fiesta de fin de año de una importante multinacional se planea contratar una empresa de banquetes. La empresa escogida ofrece siete opciones de menú diferentes según las necesidades de los clientes.

Si la multinacional desea que los empleados puedan acceder a cinco menús diferentes, ¿de cuántas maneras puede hacer la elección?

Figura 53

En este caso N = 7 y n = 5. Al finalizar la situación se puede determinar que la muestra no es ordenada, pues no importa en qué orden se seleccionen los diferentes menús, además no hay repetición pues un menú no se puede seleccionar mas de una vez. Teniendo en cuenta lo anterior, el número de elementos del espacio muestral se calcula así:

$$\frac{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)¡5!} = \frac{7\,x\,6\,x\,5}{2!5!} = \frac{7\,x\,6}{2} = 21$$

Por tanto, la multinacional tiene 21 opciones de combinar los menús.

EJEMPLO:

Un nuevo modelo de lotería emplea una selección aleatoria de seis números entre un grupo de 47 posibles. En una urna, se depositan balotas numeradas del 01 al 47 y el experimento consiste en extraer una balota de la urna y ponerla en una fila. El ganador será quien tenga un boleto de lotería cuyos seis números, sin importar el orden, sean los mismos que se obtengan al extraer las balotas. Cuántas opciones hay de combinar dicha selección?

Para esta situación se tiene que N = 47 y n= 6

Al finalizar las características de la muestra se observa que no hay repetición, pues una balota que ha sido seleccionada no se devuelve a la urna y no es importante el orden, pues es una aclaración específica de este estilo de lotería.

Con base en el anterior análisis, se tiene que el número de elementos del espacio muestral está dado por:

$$\binom{47}{6} = \frac{47\,x\,46\,x\,45\,x\,44\,x\,43\,x\,42\,x\,41!}{(47-6)!6!} = \frac{47\,x\,46\,x\,45\,x\,44\,x\,43\,x\,42}{6\,x\,5\,x\,4\,x\,3\,x\,2\,x\,1} = 10.737.573$$

Así que hay 10.737.573 posibles combinaciones en la selección.

4.6.5 ACTIVIDAD PERSONAL 7

1. Una persona desea construir su casa, para lo cual considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

2. ¿Cuántas placas para automóvil pueden ser diseñadas si deben constar de tres letras seguidas de cuatro números, si las letras deben ser tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9?, a. Si es posible repetir letras y números, b. No es posible repetir letras y números, c. Cuántas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D y empiezan por el cero, d. Cuantas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D seguida de la G.

3. ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, los que deben constar de seis dígitos tomados del 0 al 9?, a. Considere que el cero no puede ir al inicio de los números y es posible repetir dígitos, b. El cero no debe ir en la primera posición y no es posible repetir dígitos, c. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b empiezan por el número siete?, d. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b forman un número impar?

4. Suponga que un salón de clase está constituido por 35 alumnos. a) El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como mantener el aula limpia o entregar material a los alumnos cuando así sea necesario. b) El maestro desea que se nombre a los representantes del salón (presidente, secretario y Tesorero).

5. ¿Cuántas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de presidente, secretario, Tesorero, Primer Vocal y Segundo Vocal?, sí esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa.

6. ¿Cuántos puntos de tres coordenadas (x, y, z), será posible generar con los dígitos 0, 1, 2, 4, 6 y 9?, Si, a. No es posible repetir dígitos, b. Es posible repetir dígitos.

7. Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar, si debe constar de dos letras, seguidas de cinco dígitos, las letras serán tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9. a. Considere que se pueden repetir letras y números, b. Considere que no se pueden repetir letras y números, c. ¿Cuántas de las claves del inciso b empiezan por la letra A y terminan por el número 6?, d. ¿Cuántas de las claves del inciso b tienen la letra R seguida de la L y terminan por un número impar?

8. Una persona acomoda en un estante de una librería seis libros de filosofía, cuatro de química y ocho de historia. De cuántas formas se pueden acomodar los libros si a) los de historia siempre deben de ir juntos b) los libros deben de ir separados por materias

9. Considera todas las letras de la palabra Cuitláhuac, calcula la cantidad de arreglos diferentes que se pueden formar considerando todas las letras.

10. Cuatro parejas (cuatro hombres y cuatro mujeres) van a ir al teatro; compraron ocho boletos en la misma fila. a) calcula de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las cuatro parejas sin que alguna quede separada b) calcula de cuántas maneras diferentes se pueden colocar las ocho personas, si se toman dos hombres para que no se sienten juntos?

5. EVALUACIÓN Y RETROALIMENTACIÓN

REJILLA DE EVALUACIÓN Y RETROALIMENTACIÓN	Estratégico Superior (95-100)	Autónomo Alto (80-94)	Resolutivo Básico (70-79)	Pre-formal o Receptivo Bajo (10-69)	Valoración
Planificación del Trabajo / Puntualidad	Realiza uso adecuado de materiales y recursos disponibles, de acuerdo con el procedimiento y plazo establecidos.	Usa materiales y recursos disponibles, de acuerdo con el procedimiento y plazo establecidos.	Usa materiales y recursos disponibles con cierta dificultad, pero se ajusta al plazo establecido.	Usa materiales y recursos disponibles con dificultad, sin ajustarse al plazo establecido.	
Responsabilidad	Asume responsabilidades y comprende las de los demás, valorando el esfuerzo individual y colectivo.	Asume y comprende responsabilidades, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Asume y comprende responsabilidades con dificultad, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Elude responsabilidades y tiene dificultad para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	
Participación / Actitud	Forma parte activa y armónica de la dinámica grupal, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de la dinámica grupal, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de la dinámica grupal y realiza con dificultad propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Con dificultad forma parte de la dinámica grupal, sin realizar propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	
Habilidades Sociales	Interactúa con empatía y autocontrol, manteniendo actitud de respeto hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen al desarrollo de actividades.	Interactúa con empatía y autocontrol, manteniendo actitud de respeto hacia otros puntos de vista, lo que contribuye al desarrollo de actividades.	Interactúa con actitud de respeto hacia otros puntos de vista, lo que contribuye al desarrollo de actividades.	Interactúa con dificultad durante el desarrollo de actividades.	
Generación y Presentación de Evidencias	Contribuye de manera activa al alcance de metas, responsabilizándose de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	Contribuye al alcance de metas, responsabilizándose de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	Contribuye al alcance de metas, pero con dificultad se responsabiliza de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	Con dificultad contribuye al alcance de metas, sin responsabilizarse de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	

6.OBSERVACIONES Y/O SUGERENCIAS

____
____
____
____
____

BIBLIOGRAFÍA Y/O WEBGRAFÌA

http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Escalante-Silvia.pdf
https://www.geogebra.org/?lang=es
http://www.essa.com.co/site/Portals/14/Docs/Tarifas/TARIFAS_2018/Tarifa_ESSA_201812.pdf
http://descargas.colombiaaprendiendo.edu.co/download/2018/95/10/0/
Matemáticas 8, Proyecto los Caminos del Saber, Santillana. Bogotá, 2013.

Saber 3º, 5º y 9º 2015 Cuadernillo de prueba Primera Edición. Matemáticas 9º. Ministerio de Educación.
http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Escalante-Silvia.pdf
SANTILLANA; Hipertexto Santillana 10 Matemáticas, Editorial Santillana S.A.: 2010, Bogotá Colombia.
https://www.geogebra.org/?lang=es
http://www.paintballbarcelona.cat/es/bodas-eventos/pintball/que-es-el-paintball/46387.html
https://www.aristasur.com/contenido/sistema-de-coordenadas-geograficas-longitud-y-latitud
http://descargas.colombiaaprendiendo.edu.co/download/2018/101/11/0/
http://descargas.colombiaaprendiendo.edu.co/download/2018/95/11/0/
Matemáticas 8, Proyecto los Caminos del Saber, Santillana. Bogotá, 2013.
http://eprints.ucm.es/15707/1/eprint.pdf
https://rodrivelp.blogspot.com/2011/10/ecuaciones.html
https://www.vitutor.net/2/11/cuartiles_percentiles.html
https://matematica.laguia2000.com/general/figuras-planas