	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 01
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 15/09/2015

ÁREA: Matemáticas			**DOCENTE:**	
ASIGNATURA: Matemáticas			**ESTUDIANTE:**	
GRADO: Ciclo V	**MÓDULO: 1**	**GUIA:** 1	**TIEMPO:**	**FECHA:** ____/ ____ / ____

1. COMPETENCIAS Y CRITERIOS

COMPETENCIAS	CRITERIOS
• Interpretación y representación. • Formulación y ejecución. • Argumentación.	• Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. • Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas. • Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. • Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. • Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos. • Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. • Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. • Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación. • Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. • Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos). • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad)

2. TÍTULO DE LA GUÍA

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS, APLICACIONES, LUGARES GEOMETRICOS Y ASOCIACIÓN ENTRE VARIABLES ESTADISTICAS

3. SITUACIÓN PROBLEMA

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es “la medición de los triángulos”. Deriva de los términos griegos τριγωνο trigōno triángulo y μετρον metron medida.

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 01
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 15/09/2015

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

A continuación, en el video https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4, podras observar los origenes y aplicaciones que tiene la trigonometria

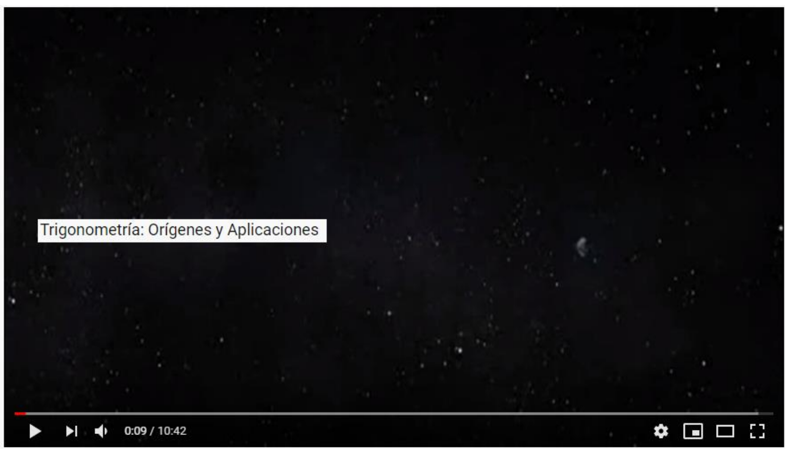


Figura 1 https://www.youtube.com/watch?v=WSjXGeTMYd4

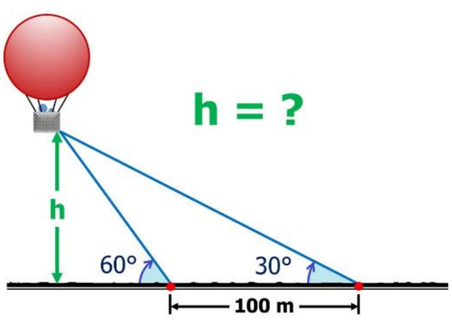


Figura 2

Un ejemplo de una situación que se puede resolver mediante la trigonometría es el planteado en la figura.

Con tus conocimientos previos a la trigonometría. ¿puede determinar la altura a la que se encuentra el globo en base a los datos dados?

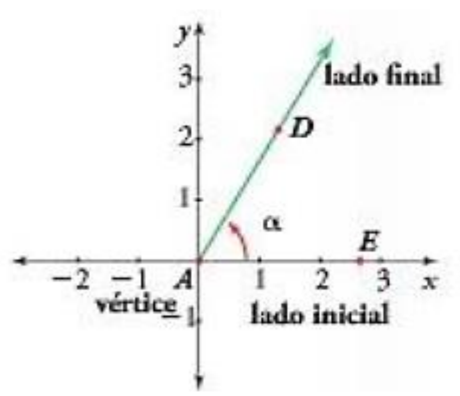
4. MEDIACIÓN DEL CONOCIMIENTO Y DEL PROBLEMA

4.1. ÁNGULOS

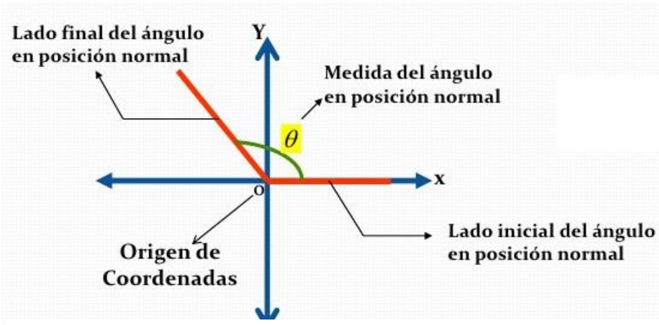
Desde la trigonometría, un ángulo se define como la rotación de una semirrecta sobre su origen En posición inicial, esta semirrecta recibe el nombre de lado inicial y, en posición final, recibe el nombre de lado final.

En el ángulo $\sphericalangle DAE$ de la gráfica, A es el vértice, $\overrightarrow{AE}$ es el lado inicial y $\overrightarrow{AD}$ es el lado final.

Los ángulos también se pueden denotar por las letras griegas α (alfa), β(beta), θ (teta), entre otras.



Gráfica 1



Gráfica 2

4.1.1. ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL O CANÓNICA

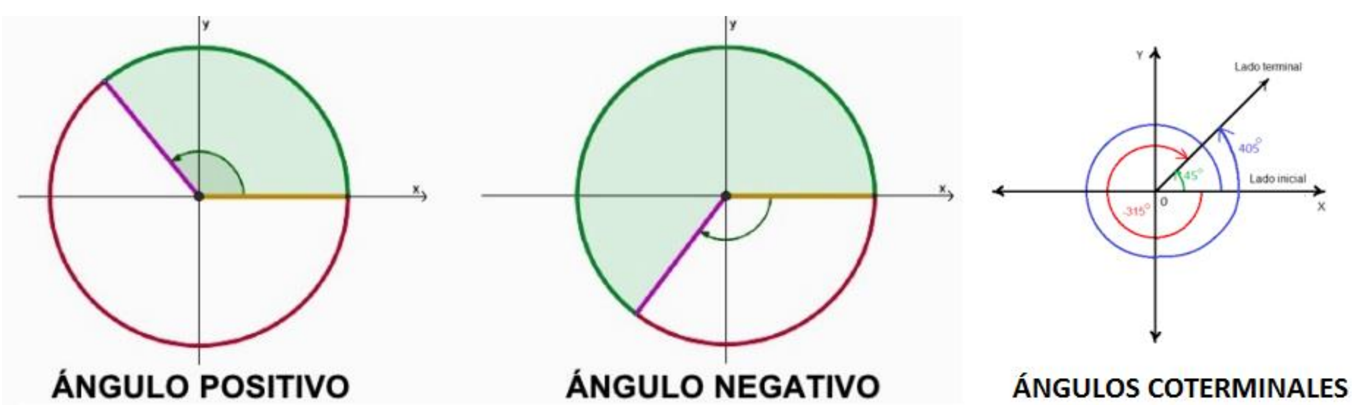
Un ángulo α se considera en posición normal o canónica, cuando, en un sistema de coordenadas, α tiene su vértice sobre el origen y su lado inicial coincide son el semieje positivo x.

Para mayor comprensión del tema ángulos, observa el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=sy54KAHh6Tg

Figura 3 https://www.youtube.com/watch?v=sy54KAHh6Tg

4.1.2. ÁNGULOS POSITIVOS Y ÁNGULOS NEGATIVOS

Cuando un ángulo ha sido generado por una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj (antihorario), se dice que el ángulo es **positivo.** Si la rotación se realiza en el mismo sentido de las manecillas del reloj (horario), el ángulo es **negativo.**
Dos ángulos distintos, que tengan el mismo lado final se denominan ángulos **coterminales.**



Gráfica 3

Para mayor comprensión de los ángulos coterminales, observar el video:
https://www.youtube.com/watch?v=X11iG_dGWoU

Figura 4 https://www.youtube.com/watch?v=X11iG_dGWoU

4.1.3. MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Las unidades de medición de ángulos usadas con mayor frecuencia son el grado y el radián.

El grado es la unidad de medida del sistema sexagesimal y el radián es la unidad de medida del sistema cíclico.

4.1.3.1. MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL

Este sistema utiliza como unidad de medición el grado. Un grado corresponde a un pedazo de las 360 partes iguales en que dividimos la circunferencia. Por tanto, un giro completo son 360°.

El grado tiene dos submúltiplos: el minuto y el segundo

Un minuto 1' corresponde a $\frac{1}{60}^{\circ}$ y un segundo 1'' corresponde a $\frac{1}{60}'$. Por tanto, un grado 1° son 60 minutos, un minuto 1' son 60 segundos y un grado 1° son 3.600 segundos.

$$1° = 60', \quad 1' = 60'', \quad 1° = 3.600''$$

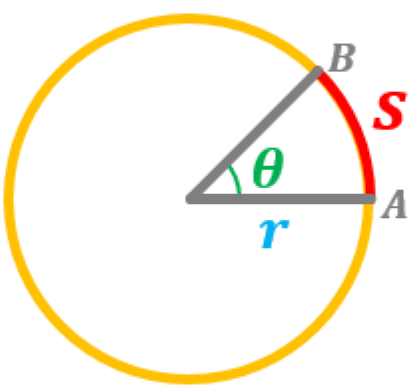
Ejemplo: Expresar 36,275° en grados, minutos y segundos
$36{,}275° = 36° + (0{,}275 \times 60)' = 36° + 16{,}5'$
$36° + 16{,}5' = 36° + 16' + (0{,}5 \times 60)'' = 36° + 16' + 30''$
Luego $36{,}275° = 36°16'30''$

Ejemplo: Expresar 12°24'54" en grados
$12°24'54'' = \left(12 + \frac{24}{60} + \frac{54}{3600}\right)^{\circ} = 12{,}415°$

Para afianzar los conocimientos adquiridos del sistema sexagesimal, observa el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=sWo40WwuDFY

Figura 5https://www.youtube.com/watch?v=sWo40WwuDFY

4.1.3.2. MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN EL SISTEMA CÍCLICO



Gráfica 4

La unidad de medida de ángulos en el sistema cíclico es el radian.

El radián (rad) mide el ángulo presentado como central a una circunferencia y su medida es igual a la razón entre la longitud del arco que comprende de dicha circunferencia y la longitud del radio, es decir, mide la cantidad de veces que la longitud del radio cabe en dicho arco.

$$\theta = \frac{S}{r}$$

Ahora, como la longitud de una circunferencia, es decir, el arco para el giro completo de 360° es $2\pi r$, entonces

$$\theta = \frac{S}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi\ (rad)$$

Por tanto, podemos concluir que $360° = 2\pi\ rad$

Para mayor comprensión del sistema cíclico, observa el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=1ugM9UGRND0

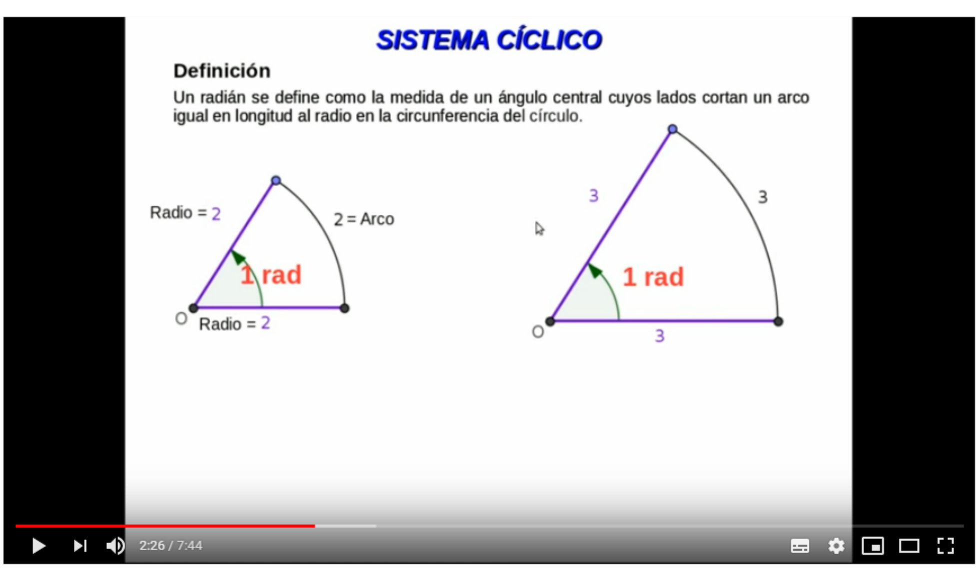


Figura 6 https://www.youtube.com/watch?v=1ugM9UGRND0

4.1.3.3. CONVERSIONES ENTRE EL SISTEMA SEXAGESIMAL Y EL SISTEMA CÍCLICO

Como anteriormente determinamos: $360° = 2\pi\ rad$

Por tanto, al aplicar regla de tres:

Grados	Radianes
360°	2π
1°	x

$$x = \frac{1°\times 2\pi rad}{360°} = \frac{\pi}{180} rad$$

Entonces en adelante, puesto que $1° = \frac{\pi}{180} rad$, para convertir de grados a radianes simplemente multiplicaremos los grados por $\frac{\pi}{180} rad$. Mientras que, si queremos convertir radianes a grados, multiplicaremos por el inverso multiplicativo de este factor, es decir, por $\frac{180^{\circ}}{\pi}$

Ejemplo: Convertir 210° a rad

$$210 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{7}{6}\pi\ rad$$

Ejemplo: Convertir $\frac{5\pi}{4}$ radianes a grados

$$\frac{5\cancel{\pi}}{4} \times \frac{180^{\circ}}{\cancel{\pi}} = 225°$$

En el siguiente video, puedes observar algunos otros ejemplos de conversiones entre sistemas de medición de ángulos: https://www.youtube.com/watch?v=OzAekiKlI_I

Figura 7 https://www.youtube.com/watch?v=OzAekiKlI_I

4.1.3.4. ACTIVIDAD PERSONAL 1

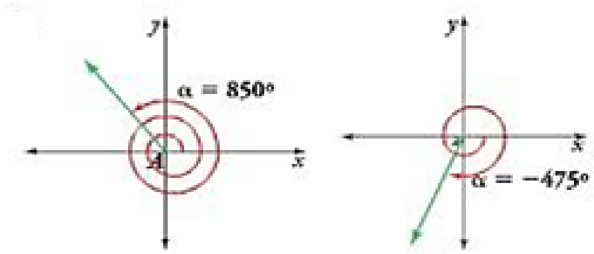
1. Nombra cada ángulo. Luego, determina el lado inicial, el lado final, el vértice y el sentido

Gráfica 5

2. La torre de Piza, ubicada en Toscana – Italia, tienen una inclinación de 4°10’22” con respecto al eje vertical. Expresa la inclinación de la Torre de Pisa únicamente en grados.

Figura 8

3. Traza un ángulo positivo y un ángulo negativo, que sean coterminales con cada uno de los siguientes ángulos.



Gráfica 6

4. Pasa las siguientes medidas de grados a radianes:
   a) 45º b) 90º c) 180º d) 270º e) 720º f) 315º g) -30º

5. Pasa las siguientes medidas de radianes a grados:
   a) π rad b) 3π rad c) π/4 rad d) 2π/3 rad e) 3π/4 rad f) π/6 rad g) 2π/5 rad

6. Completa la tabla

Grados	Radianes
	0
	$\frac{1}{6}\pi$
45°	
	$\frac{1}{3}\pi$
90°	

Tabla 1

7. Dibuja un ángulo normal de -45° y escribe tres ángulos que sean coterminales con él.

4.2. TRIÁNGULOS

En trigonometría es importante tener en cuente cómo se clasifican los triángulos y cuales son sus principales propiedades.

4.2.1. CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Los triángulos se clasifican según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, así:

Según la medida de sus lados		
Equilátero	**Isósceles**	**Escaleno**
Todos sus lados tienen la misma medida	Dos de sus lados tienen la misma medida	Ningún lado mide igual que otro

Tabla 2

Según la medida de sus ángulos		
Acutángulo	**Rectángulo**	**Obtusángulo**
Todos sus ángulos internos son agudos	Tiene un ángulo recto	Tiene un ángulo obtuso

Tabla 3

4.2.2. PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS

Los triángulos tienen muchas propiedades, entre las más utilizadas se encuentras:

- Si los lados de un triángulo son congruentes, entonces, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces, los lados opuestos a dichos ángulos son congruentes.
- La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°
- Si dos triángulos tienen la misma base *b* y la misma altura, entonces, tienen áreas iguales.
- Si un triángulo es equilátero entonces es equiángulo.
- La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.

Un triángulo muy utilizado en trigonometría es el **triángulo rectángulo**, en el que se hace el estudio de la relación entre sus lados mediante el Teorema de Pitágoras.

4.2.3. TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa** y los otros lados se denominan **catetos.**

El **teorema de Pitágoras** establece que la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado. Así, si en un triángulo rectángulo las medidas de los catetos son a, b y la medida de la hipotenusa es c, entonces se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

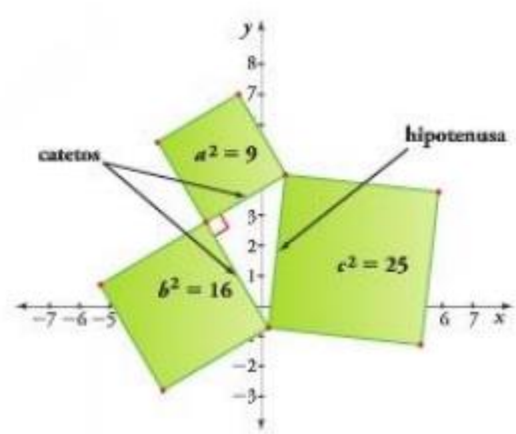


Figura 9

En el siguiente video, podrás observar como aplicar el teorema de Pitágoras a la resolución de situaciones: https://www.youtube.com/watch?v=BhHgMtjlebc

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 01
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 15/09/2015

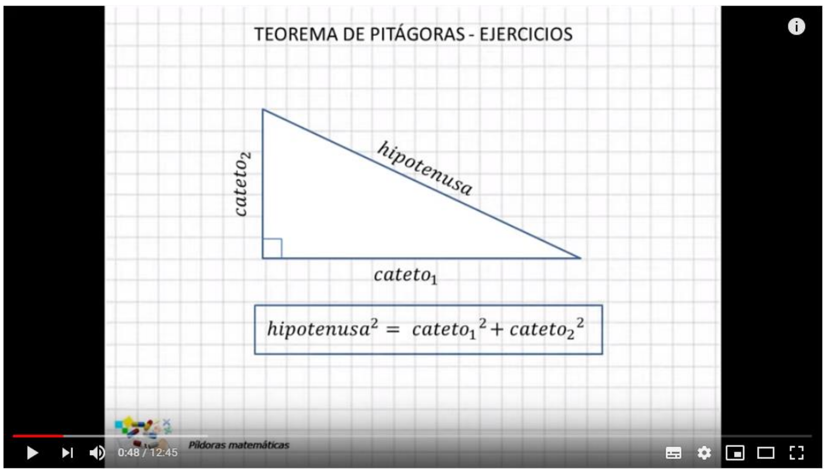
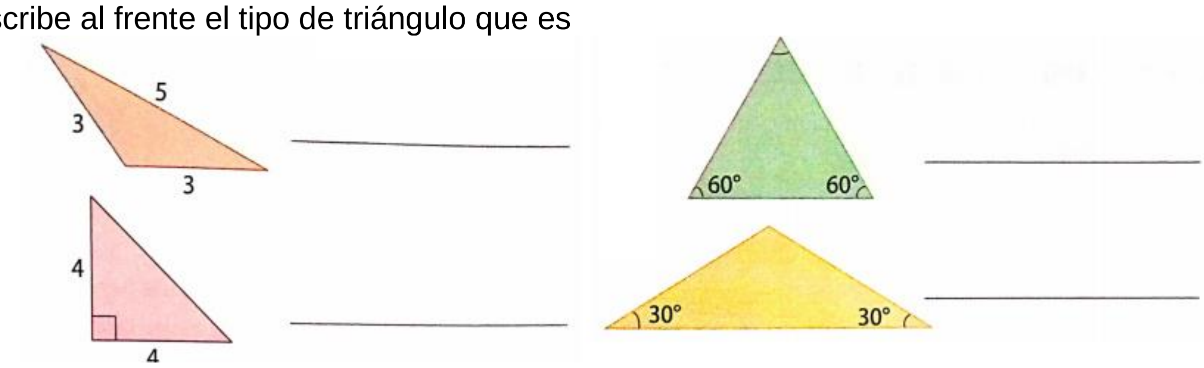


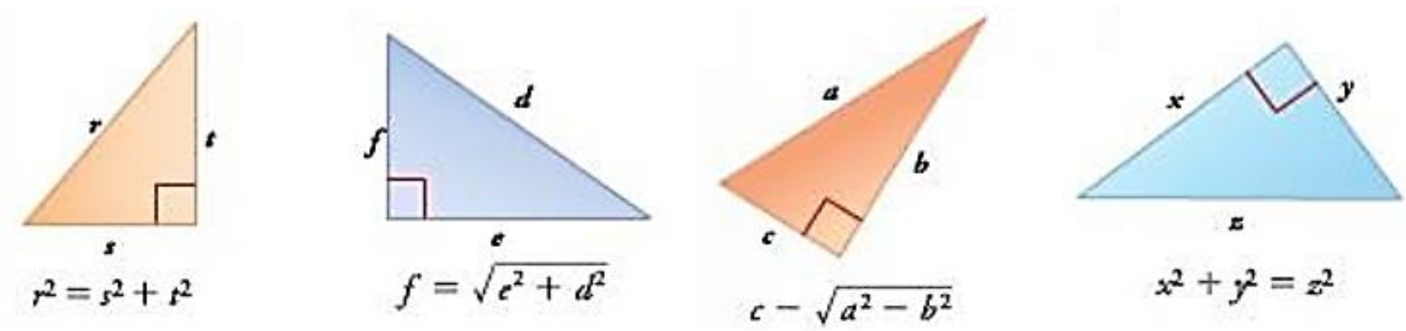
Figura 10 https://www.youtube.com/watch?v=BhHgMtjlebc

4.2.4. ACTIVIDAD PERSONAL 2

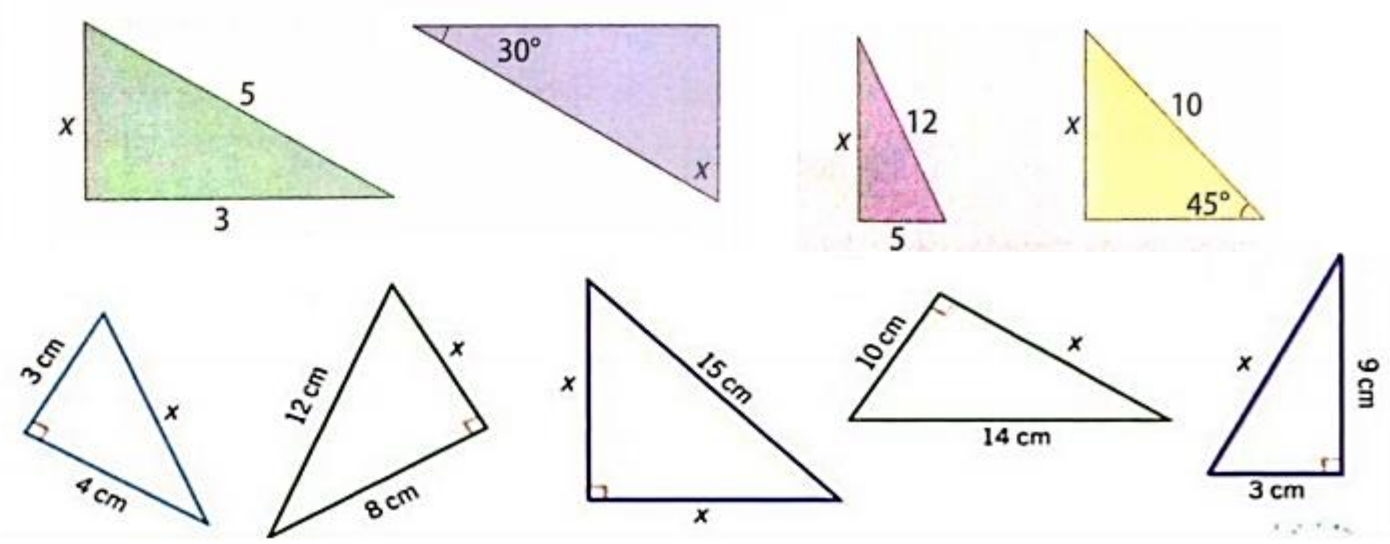
1. Escribe al frente el tipo de triángulo que es



2. Observar los siguiente triángulos. Luego, establecer si la igualdad correspondiente es verdadera o falsa.



3. Determina el valor de *x* para cada triángulo



4. Completar las medidas en los casos en los que es posible calcularlas. Luego, responda.

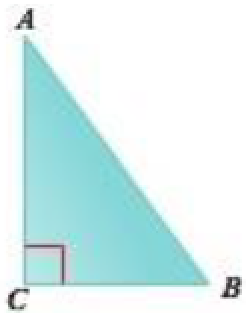


Figura 11

Si $AB = 3$ y $BC = 4$, entonces $CA =$
Si $cB = 6$ y $AB = 8$, entonces $AC =$
Si $AC = 10$ y $BC = 4$, entonces $AB =$
Si $BC = 38$ y$AC = \sqrt{3}$, entonces $BA =$
Si $AB = \sqrt{8}$ y $AC = \sqrt{8}$, entonces $BC =$

¿En cuáles casos no es posible calcular la medida indicada? ¿por que?

5. La torre de Pisa tiene una altura aproximada de 56 m. Actualmente, la torre se separar de la vertical una distancia de 3.9 m. Hallar la longitud de la vertical desde la cima de la torre hasta el suelo.

6. Una escalera de 5 m de largo está apoyada contra una pared con la base separada a 2.5 m de la pared. ¿A qué altura del piso se encuentra la parte más alta de la escalera?

7. Observa la siguiente fotografía y redacta una situación en donde se pueda utilizar el teorema de Pitágoras


Figura 12

4.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Utilizaremos un triángulo rectángulo para definir las funciones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc).

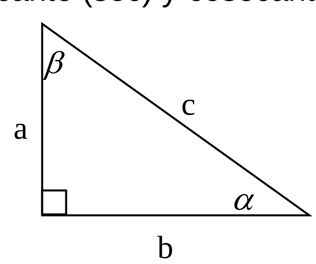


Figura 13

En un triángulo rectángulo, estas funciones se definen como sigue:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \sec \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Ejemplo: Determina las razones trigonométricas respecto al ángulo θ de acuerdo al siguiente triángulo.

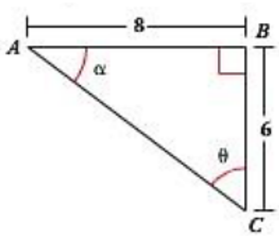


Figura 14

Respecto al ángulo θ, nos damos cuenta que el cateto opuesto mide 8, el cateto adyacente mide 6 y la hipotenusa no conocemos aun el valor, por lo cual debemos aplicar teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Ahora conociendo el valor de la hipotenusa, procedemos a determinar las razones trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{CO}{h} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad cos\theta = \frac{CA}{h} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$cot\theta = \frac{CA}{CO} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad sec\theta = \frac{h}{CA} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad csc\theta = \frac{h}{CO} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Para mayor comprensión, observa el siguiente video acerca de las razones trigonométricas: https://www.youtube.com/watch?v=ulrqfi20Czs

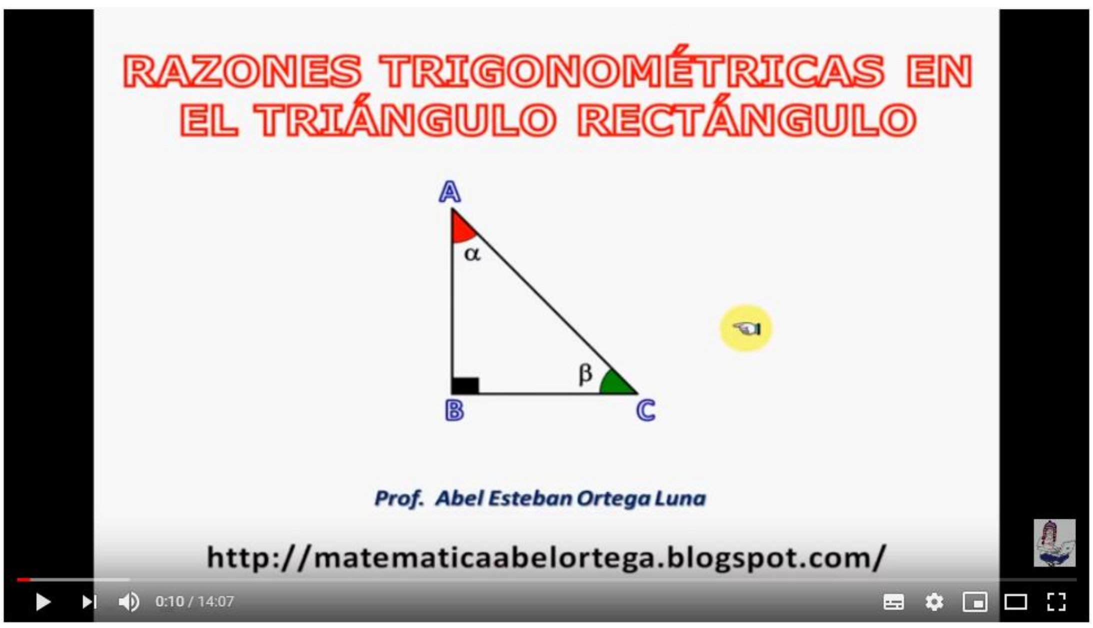


Figura 15 https://www.youtube.com/watch?v=ulrqfi20Czs

4.3.1. ACTIVIDAD PERSONAL 3

1. Llenar la siguiente tabla con los conceptos que aparecen a continuación, teniendo en cuenta la relación entre el lado y el ángulo.

   - Hipotenusa
   - Cateto adyacente
   - Cateto opuesto.

Lado	Ángulo *B*	Ángulo *C*
a		
b		
c		

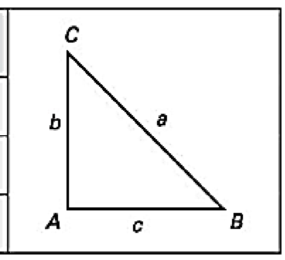


Tabla 4

2. Considerando las definiciones anteriores y el triángulo que está a la derecha, completar las siguientes tablas:

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 01
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 15/09/2015

Funciones del $\angle B$	Funciones del $\angle C$
$\text{sen } B =$	$\text{sen } C =$
$\cos B =$	$\cos C =$
$\tan B =$	$\tan C =$
$\cot B =$	$\cot C =$
$\sec B =$	$\sec C =$
$\csc B =$	$\csc C =$

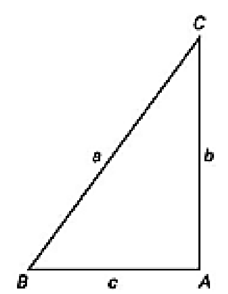


Tabla 6

Funciones del $\angle \alpha$	Funciones del $\angle \beta$
$\text{sen } \alpha =$	$\text{sen } \beta =$
$\cos \alpha =$	$\cos \beta =$
$\tan \alpha =$	$\tan \beta =$
$\cot \alpha =$	$\cot \beta =$
$\sec \alpha =$	$\sec \beta =$
$\csc \alpha =$	$\csc \beta =$

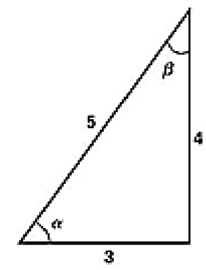


Tabla 5

3. Completar la siguiente tabla de razones trigonométricas para el ángulo dado.

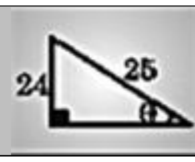
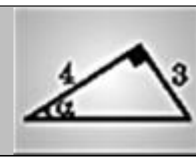
			
Sen	$\frac{5}{17}$		
Cos			
Tan			
Cot			
Sec			
Csc			

Tabla 7

4. Observar el triángulo rectángulo MPN, y en las siguientes igualdades, asignar la razón trigonométrica correspondiente para cada ángulo dado.

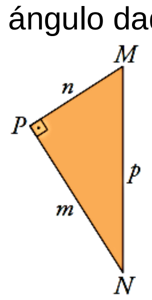


Figura 16

a. _____ $M = \frac{m}{p}$ b. _____ $N = \frac{m}{p}$ c. _____ $M = \frac{m}{n}$ d. _____ $N = \frac{n}{p}$

e. _____ $M = \frac{p}{n}$ f. _____ $N = \frac{p}{m}$ g. _____ $M = \frac{p}{m}$ h. _____ $N = \frac{p}{n}$

5. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos A y C, ∢ABD y ∢CBD

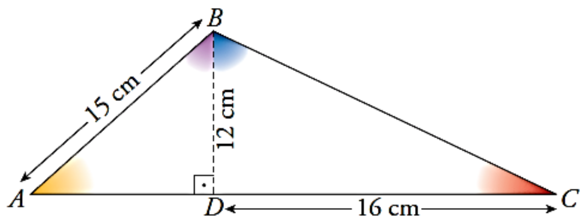


Figura 17

	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
sen	$\frac{12}{15} = 0,8$			
cos				
tg				

Tabla 8

4.3.2. APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

4.3.2.1. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo consiste en determinar la medida de sus tres lados y de sus tres ángulos.

Para resolver un triángulo rectángulo se presentan dos casos:

1. **Cuando se conocen la medida de un lado y un ángulo agudo**

En este caso se plantea una ecuación a partir de una razón trigonométrica que relacione la incógnita (medida desconocida) con la medida del lado y del ángulo que se conocen. La razón trigonométrica que se aplique depende de la medida del lado que se conoce, el cual puede ser uno de los catetos o la hipotenusa.

Ejemplo: Calcula la distancia a la que se encuentra el bote

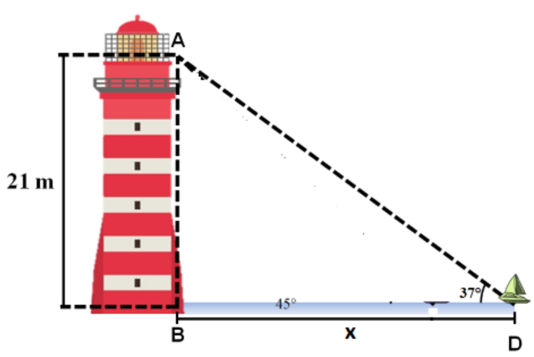


Figura 18

El dato conocido respecto al ángulo dado es el cateto opuesto, y el desconocido es el cateto adyacente. Una razón trigonométrica que los relaciona es la tan. Por tanto:

$$\tan(37) = \frac{21}{x}$$

Luego, despejando la incógnita

$$x = \frac{21}{\tan(37)} = 27,86\ m$$

En el siguiente video, puedes afianzar el tema: https://www.youtube.com/watch?v=1Udqp4SEv68

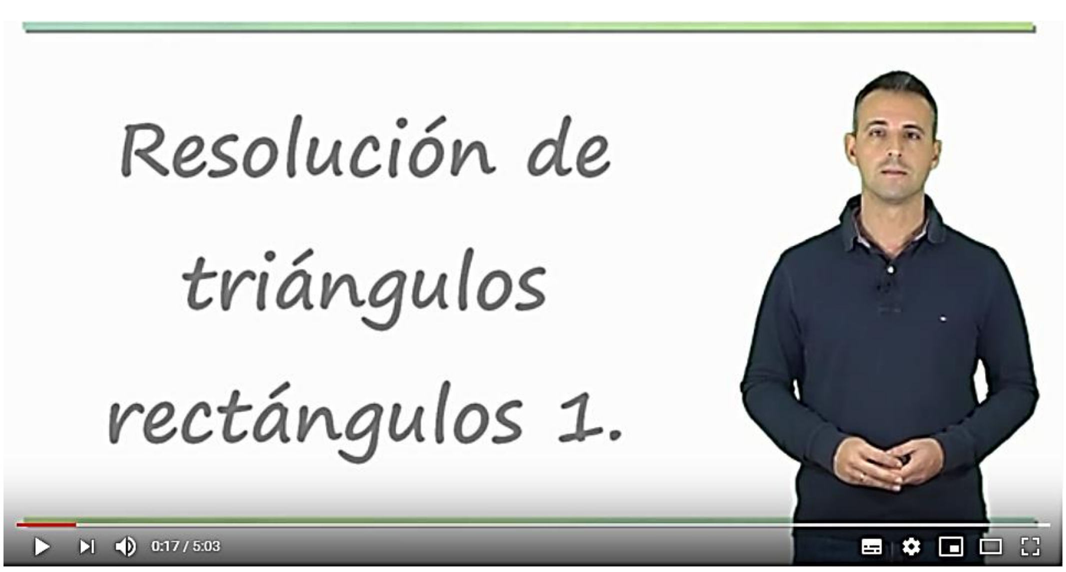


Figura 19 https://www.youtube.com/watch?v=1Udqp4SEv68

2. Cuando se conocen las medidas de dos lados

En este caso, se aplican las razones trigonométricas inversas para determinar el valor de los ángulos desconocidos. La medida del tercer lado se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras.

En las situaciones, se encuentran dos tipos de ángulos, el de elevación, que es aquel que se forma entre la línea visual y la horizontal cuando el objeto está por encima de la horizontal y el de depresión, que es aquel que se corma entre la línea visual y la horizontal cuando el objeto está por debajo de la horizontal.

Si miras hacia arriba, medirás el ángulo de elevación.
Si miras hacia abajo, medirás el ángulo de depresión.

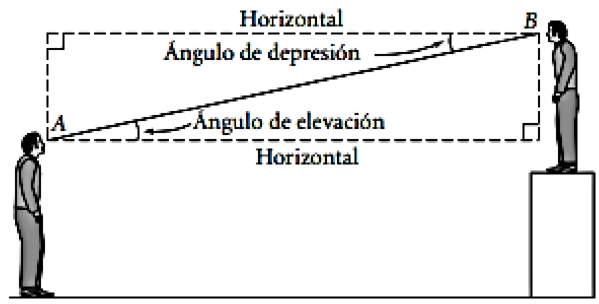


Figura 20

Ejemplo: ¿Cuál es el ángulo de elevación con el cual el observador ve la punta de la torre?

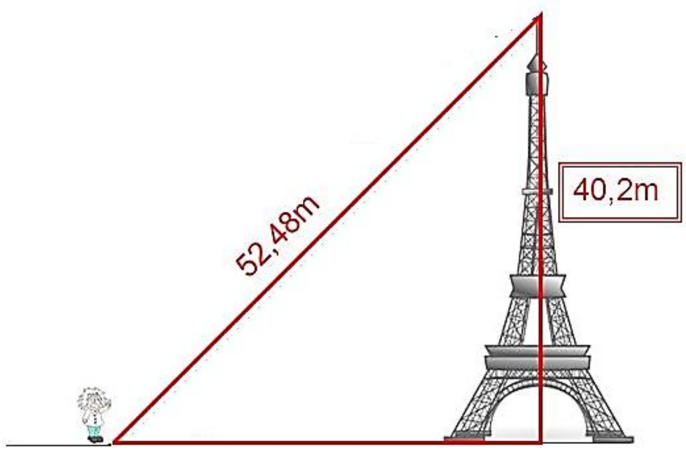


Figura 21

Los datos conocidos, respecto al ángulo que queremos determinar son el cateto opuesto y la hipotenusa. La razón trigonométrica que los relaciona es sen. Por tanto:

$$sen\theta = \frac{40,2}{52,48}$$

Luego, despejando la incógnita

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{40,2}{52,48}\right) = 49,99°$$

Observa el siguiente video, para mayor comprensión del tema:
https://www.youtube.com/watch?v=A2fkBsRWZoY

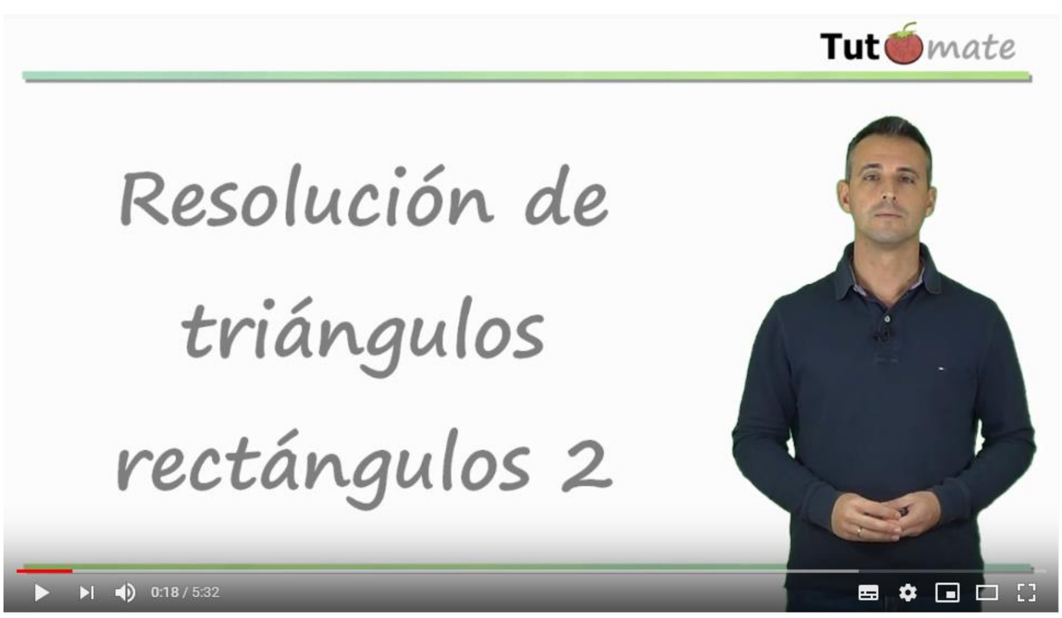


Figura 22 https://www.youtube.com/watch?v=A2fkBsRWZoY

4.3.2.1.1. ACTIVIDAD PERSONAL 4

1. Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura. Calcular la profundidad del punto B.

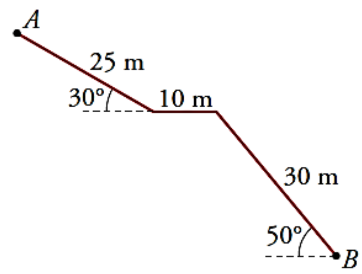


Figura 23

2. El mástil de un velero se halla unido a la proa y a la popa por dos cables que forman con la cubierta ángulos de 45° y 60°, respectivamente. Si el barco tiene una longitud de 100 m, ¿cuál es la altura del mástil?

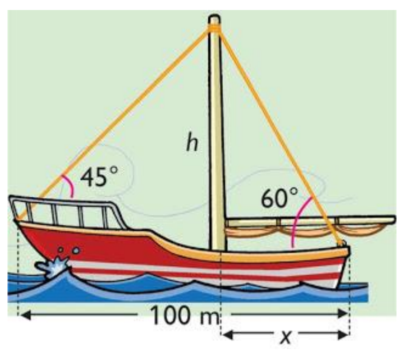


Figura 24

3. En la figura que se muestra a continuación:

¿Cuál es la altura del edificio? ¿Qué distancia existe entre el observador y en punto de mira?

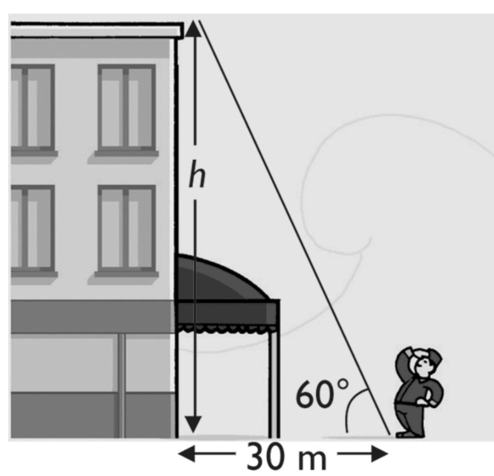


Figura 25

4. El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar. ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?

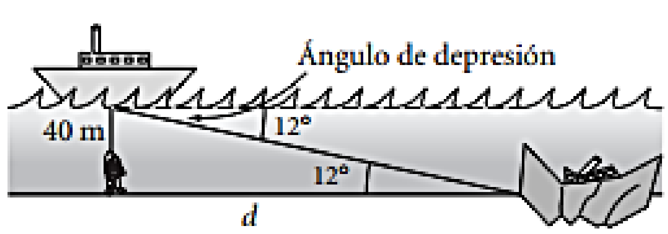


Figura 26

5. Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

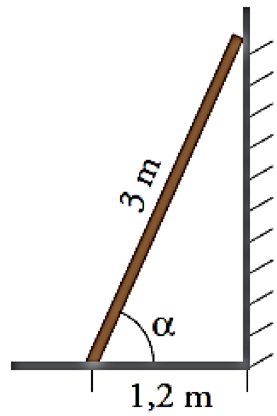


Figura 27

6. Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

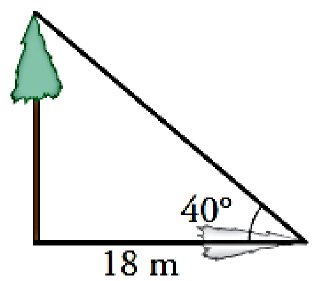


Figura 28

7. De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?

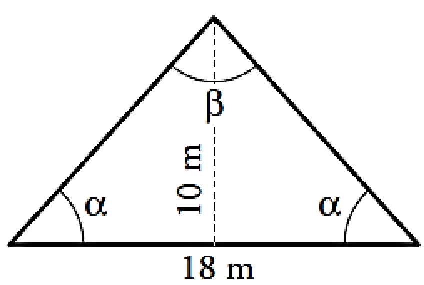


Figura 29

8. Hallar el ángulo que forma la diagonal de un cubo de arista 6 cm con la diagonal de la base.

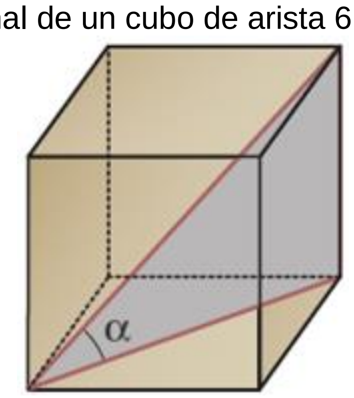


Figura 30

9. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?

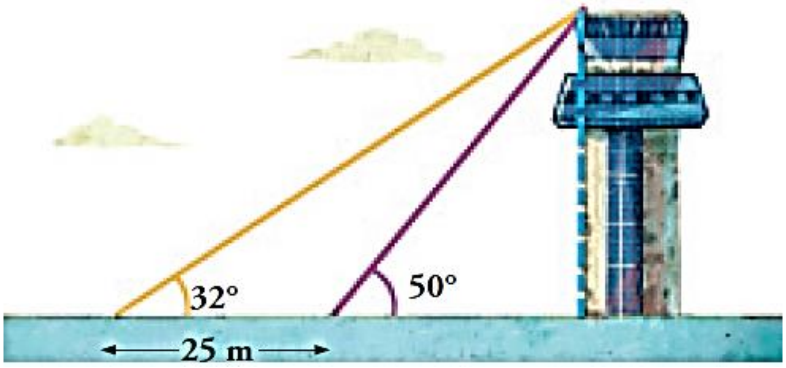


Figura 31

4.3.2.2. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Cuando un triángulo no es rectángulo, entonces es acutángulo u obtusángulo. Este tipo de triángulos de resuelven mediante la ley de senos o la ley de cosenos, teniendo en cuenta las medidas que se conocen del triángulo.

4.3.2.2.1. LEY DE SENOS

Esta ley se aplica en dos casos:
1. Cuando se conocen un lado y dos ángulos (LAA o ALA)
2. Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)

La ley de senos establece que:
Dado un triángulo de lados $a, b\ y\ c$ cuyos ángulos opuestos son $\alpha, \beta\ y\ \gamma$, respectivamente, se cumple que:

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

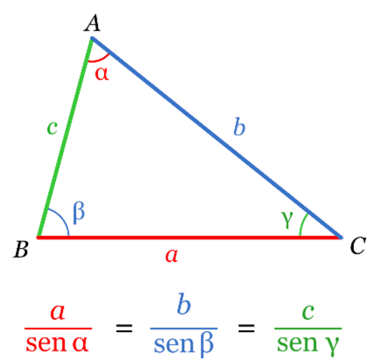


Figura 32

Ejemplo: Determina el ancho del rio, conforme los datos de la figura siendo que $\alpha = 50°$ y $\beta = 117°$

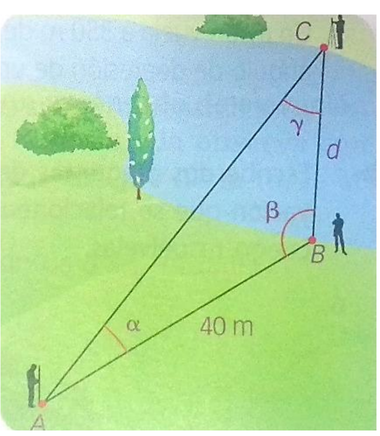


Figura 33

Como se conocen un lado y dos ángulos, aplicamos la ley del seno

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

$$\frac{sen50}{d} = \frac{sen117}{b} = \frac{sen\gamma}{40}$$

Para solucionar esta serie de razones iguales, al menos una de las razones debe estar completa en su antecedente y consecuente. Como este no es el caso, debemos buscar otro de los datos, ya sea un lado, o el ángulo que falta. Como no hay manera de determinar otro lado. Procedemos a hallar el ángulo. Esto lo podemos hacer puesto que sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$
$$50 + 117 + \gamma = 180$$
$$\gamma = 180 - 50 - 117 = 13°$$

Ahora volvemos a la ley de senos:

$$\frac{sen50}{d} = \frac{sen117}{b} = \frac{sen13}{40}$$

Y mediante la propiedad fundamental de las proporciones, resolvemos:

$$\frac{sen50}{d} = \frac{sen117}{40}$$

$$d = \frac{40 \times sen50}{sen13} = 136{,}2\ m$$

Ejemplo: En un automóvil, la manivela del cigüeñal tiene 8 cm de longitud y la biela tiene 23 cm. Cuando el ángulo OPA es de 15° como se muestra en la figura, ¿qué tan lejos está el pistón P del centro O del cigüeñal?

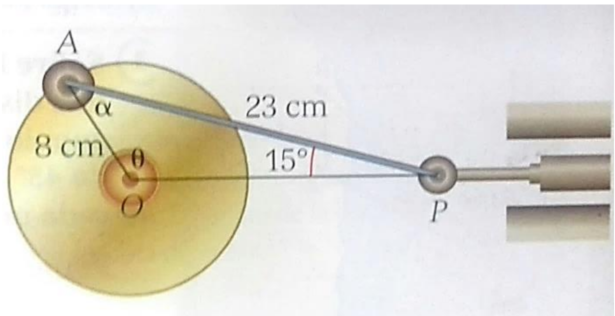


Figura 34

Como se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, resolvemos aplicando ley de senos:

$$\frac{senA}{OP} = \frac{senO}{AP} = \frac{senP}{AO}$$
$$\frac{senA}{OP} = \frac{senO}{23} = \frac{sen15}{8}$$

Sin embargo, no podemos determinar cuánto mide OP, si antes no determinamos cuanto mide el ángulo opuesto a él, es decir, el ángulo A, pero no es posible determinar el ángulo A, si antes no determinamos el ángulo O, para así poder aplicar por propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

$$\frac{senO}{23} = \frac{sen15}{8}$$
$$senO = \frac{23 \times sen15}{8}$$
$$O = sen^{-1}\left(\frac{23 \times sen15}{8}\right) = 48°$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle 0 + \sphericalangle P = 180°$$
$$\sphericalangle A + 48 + 15 = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 48 - 15 = 117°$$

$$\frac{sen117}{OP} = \frac{sen48}{23} = \frac{sen15}{8}$$
$$\frac{sen117}{OP} = \frac{sen48}{23}$$
$$OP = \frac{23 \times sen117}{sen\ 48} = 27{,}57cm$$

Para mayor compresión de la ley de senos, observa el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=4l5SXiQHfWc

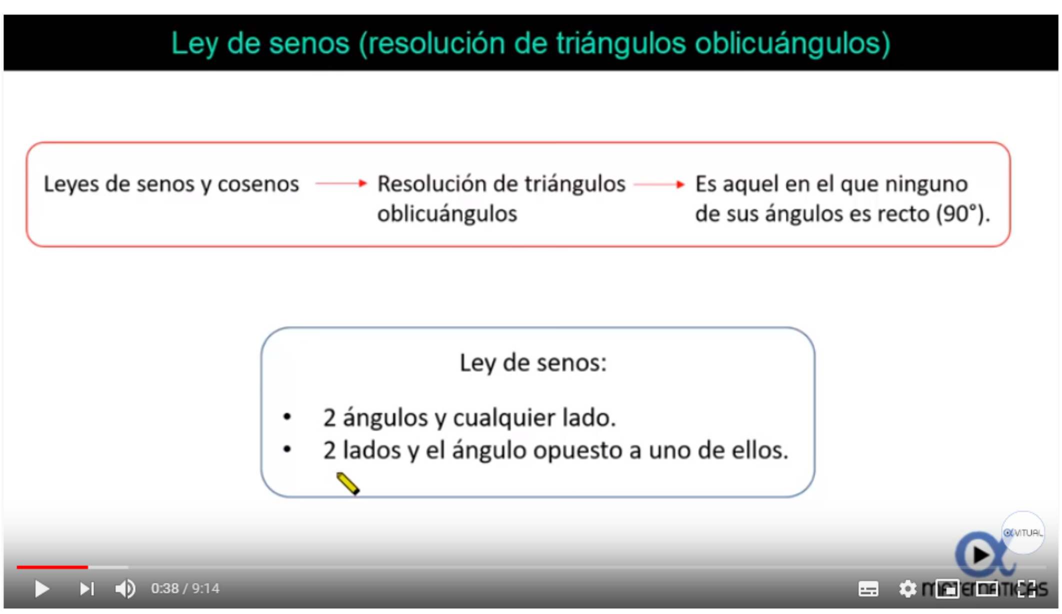


Figura 35 https://www.youtube.com/watch?v=4l5SXiQHfWc

4.3.2.2.2. LEY DE COSENOS

Esta ley se aplica en dos casos:

1. Cuando se conocen los tres lados del triángulo (LLL)
2. Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL)

La ley de cosenos establece que:
En todo triángulo el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estas longitudes por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. Es decir, dado el triángulo ABC se cumple:

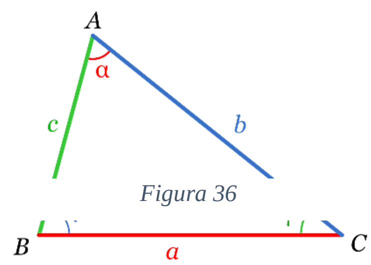


Figura 36

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

Ejemplo: Dos balsas se mueven a partir del punto B como se muestra en la figura. Determina la distancia que separa las balsas, al instante de la figura.

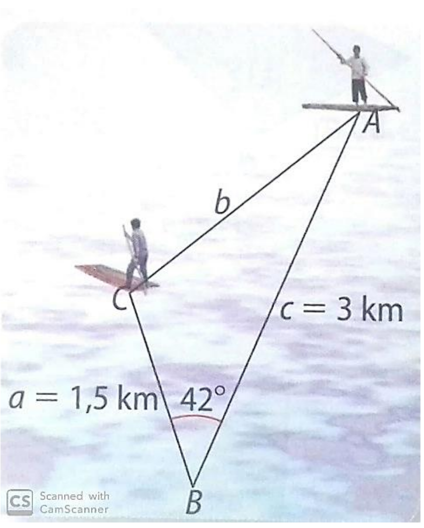


Figura 37

Como se conoce dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, aplicamos ley del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B$$

$$b^2 = 1{,}5^2 + 3^2 - 2(1{,}5)(3)\ cos\ 42$$

$$b = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2 - 2(1{,}5)(3)\ cos\ 42} = 2{,}14\ km$$

Ejemplo: Determina el ángulo C, de acuerdo a los datos suministrados en la figura

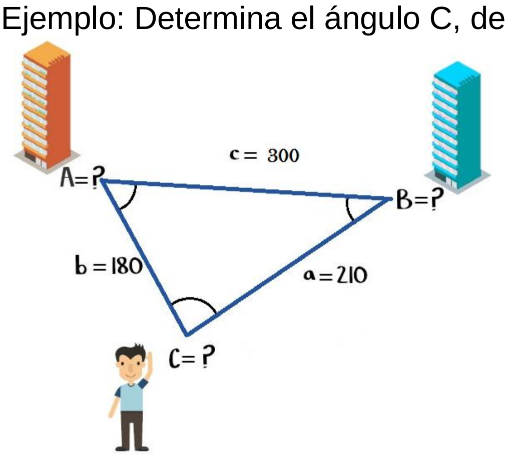


Figura 38

Como se conocen los tres lados, aplicamos ley del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$$

$$300^2 = 210^2 + 180^2 - 2(210)(180)\ cos\ C$$

$$cos\ C = \frac{300^2 - 210^2 - 180^2}{-2(210)(180)}$$

$$C = COS^{-1}\left(\frac{300^2 - 210^2 - 180^2}{-2(210)(180)}\right)$$

$$C = 100{,}29°$$

Para mayor compresión de la ley de cosenos, observa el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=SfUldTXOL9s

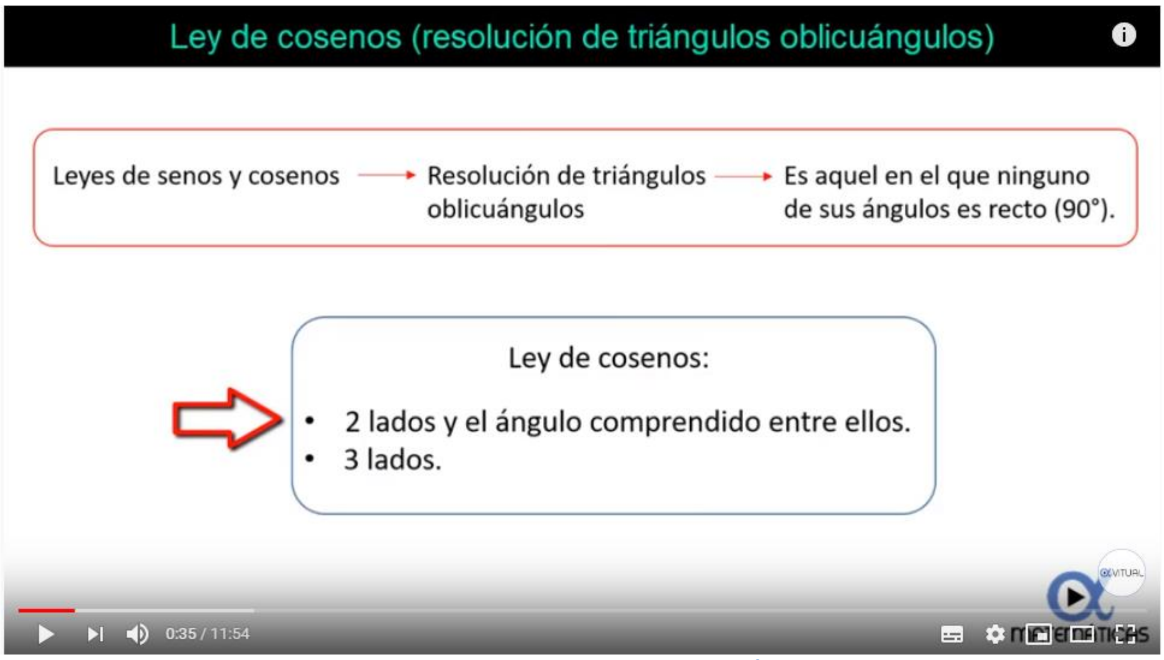


Figura 39 https://www.youtube.com/watch?v=SfUldTXOL9s

4.3.2.2.3. ACTIVIDAD PERSONAL 5

1. Un edificio se localiza al final de una calle que está inclinada en un ángulo de 8.4° con respecto a la horizontal. En un punto P que está a 210 m calle abajo del edificio, el ángulo subtendido por el edificio es de 15.6° ¿Cuál es la altura del edificio?

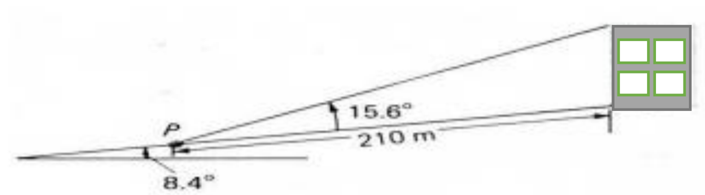


Figura 40

2. Una asta está situada en la parte superior de un edificio de 115 pies de altura. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación de los extremos superior e inferior de la asta son 63.2° y 58,6°, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de la asta?

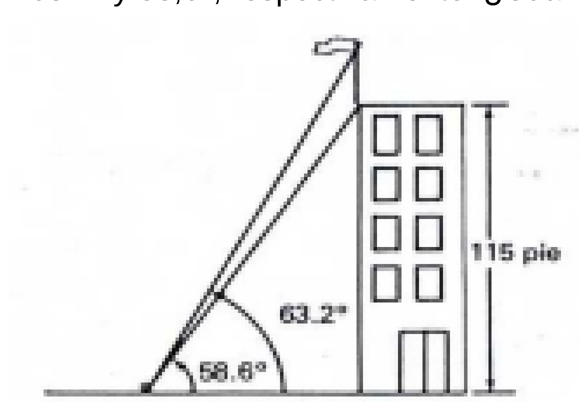


Figura 41

3. Una parcela triangular con vértices R, S y T se delimita por una cerca, pero se advierte la ausencia de la marca del lindero en S. Del título de propiedad, se sabe que la distancia de T a R es 324 m, la distancia de T a S es 506 m y el ángulo en R del triángulo mide 125,4°. Determine la ubicación de S calculando la distancia de R a S.

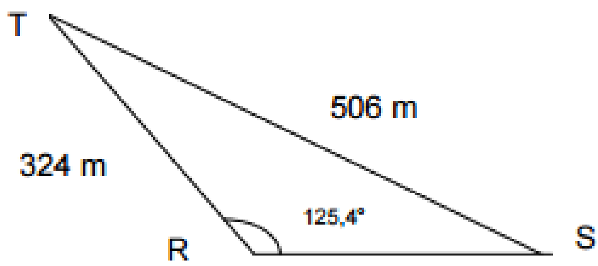


Figura 42

4. Para determinar la distancia a través de un río recto, un topógrafo elige los puntos P y Q en la rivera, donde la distancia entre P y Q es 200 m. En cada uno de los puntos se observa el punto R en la rivera opuesta. El ángulo que tiene lados PQ y PR mide 63.1° y el ángulo cuyos lados son PQ y QR mide 80,4° ¿Cuál es la distancia a través del río?

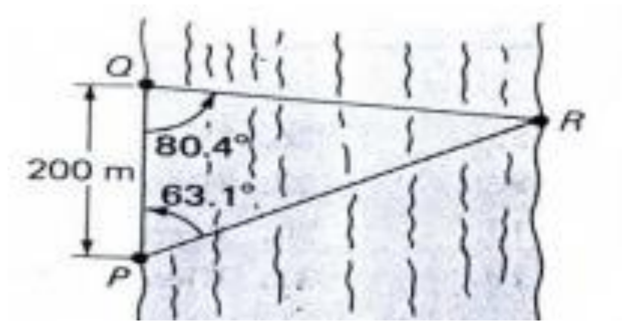


Figura 43

5. En un momento determinado cuando un avión voló sobre un camino recto que une a dos ciudades pequeñas, los ángulos de depresión de ambas fueron 10,2° y 8,7°.
   a. Determine las distancias rectas desde el avión a cada una de las ciudades en ese momento si la separación entre ambas es de 8,45 Km.
   b. Determine la altura del avión en ese momento.

Figura 44

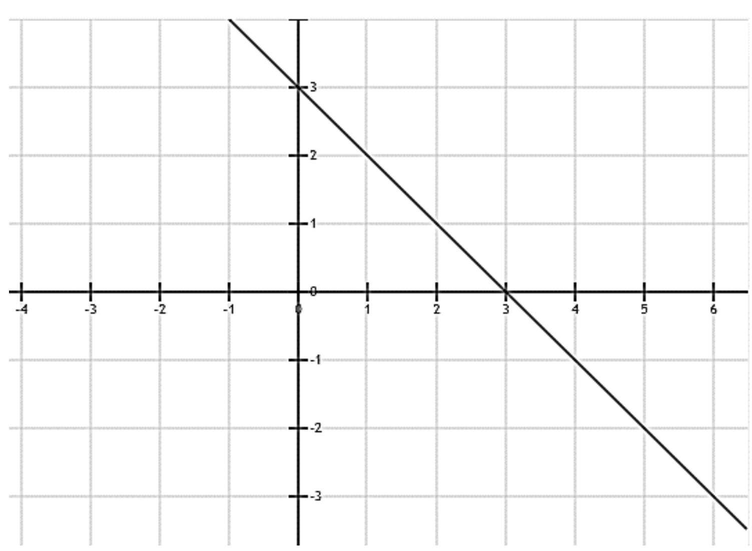
4.4. LUGARES GEOMÉTRICOS

Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que cumplen con una característica común.

De un lugar geométrico se puede determinar la ecuación o la gráfica mediante un plano cartesiano.

Ejemplo: El lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de sus coordenadas sea igual a 3.

$$x + y = 3$$
$$y = -x + 3$$



Gráfica 7

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-03
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 01
	ANEXO DE GUÍA DE CLASE	Fecha: 15/09/2015

Ingresa al siguiente video, para comprender mejor el tema:
https://www.youtube.com/watch?v=954jkmsM_78

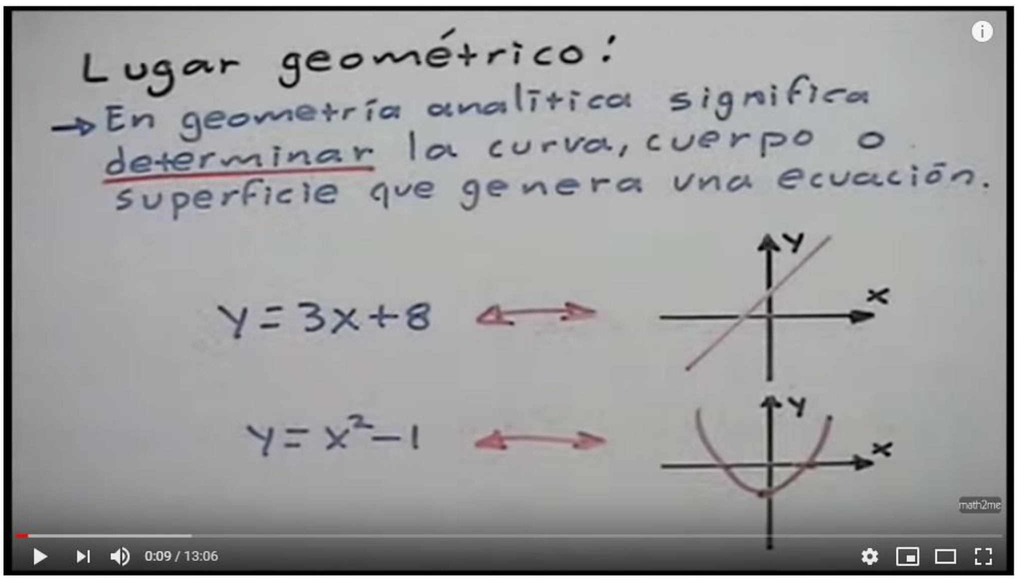


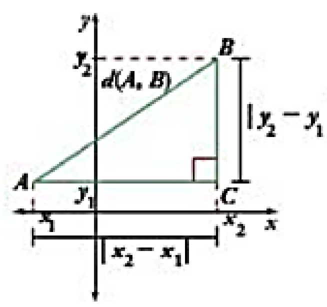
Figura 45 https://www.youtube.com/watch?v=954jkmsM_78

Las propiedades de los lugares geométricos tienen mucha relación con la distancia entre puntos. A continuación, se define como calcular esta distancia, y como hallar el punto medio de un segmento.

4.4.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se simboliza como $d(A, B)$ y se determina aplicando el teorema de Pitágoras, mediante la expresión:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Gráfica 8

Ejemplo: Calcula la distancia entre los puntos $P(\overbrace{7}^{x_1}, \overbrace{-5}^{y_1})$ y $Q(\overbrace{-4}^{x_2}, \overbrace{1}^{y_2})$

$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(P, Q) = \sqrt{(-4 - 7)^2 + \left(1 - (-5)\right)^2}$

$d(P, Q) = \sqrt{121 + 36}$

$d(P, Q) = \sqrt{157} \approx 12{,}53$

Observa el siguiente video para afianzar lo aprendido:
https://www.youtube.com/watch?v=ZPR5WeYv3B4

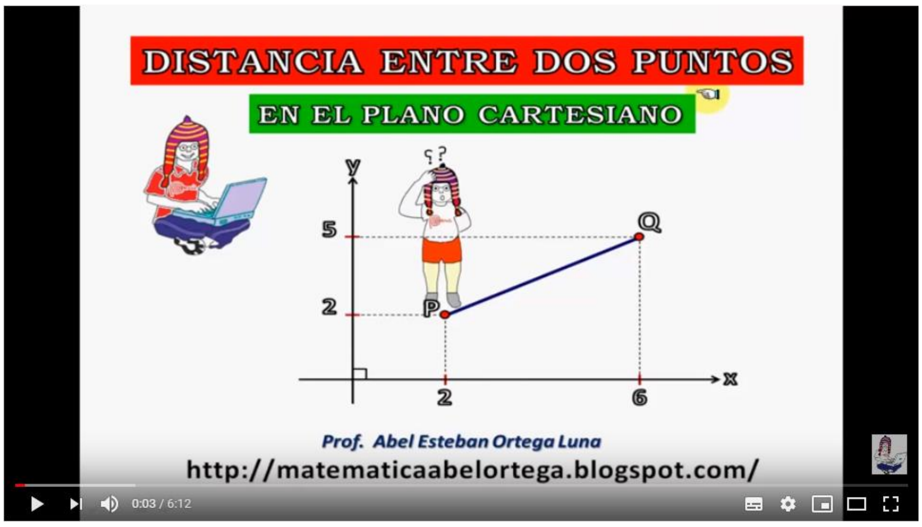
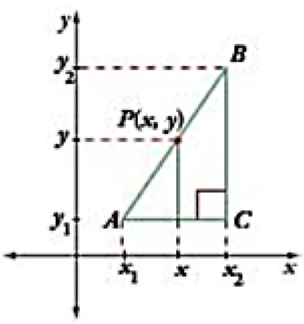


Figura 46 https://www.youtube.com/watch?v=ZPR5WeYv3B4

4.4.2. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



Gráfica 9

Las coordenadas del **punto medio** del segmento que uno los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, son $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, como se muestra en la gráfica.

Ejemplo: Determina el punto medio del segmento que uno los puntos $P(\overbrace{7}^{x_1}, \overbrace{-5}^{y_1})$ y $Q(\overbrace{-4}^{x_2}, \overbrace{1}^{y_2})$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{7+(-4)}{2}, \frac{(-5)+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$$

Para mayor comprensión de como se determina el punto medio, observa el video: https://www.youtube.com/watch?v=qzRxsVoUaMo

Figura 47 https://www.youtube.com/watch?v=qzRxsVoUaMo

4.4.3. ACTIVIDAD PERSONAL 6

1. Dibuja el lugar geométrico en cada caso. Luego, determina la ecuación.

   a. Los puntos tales que su segunda componente *y* es el doble de la primera *x*.
   b. Los puntos del plano cartesiano cuyo producto de la primera y segunda componente es 2.

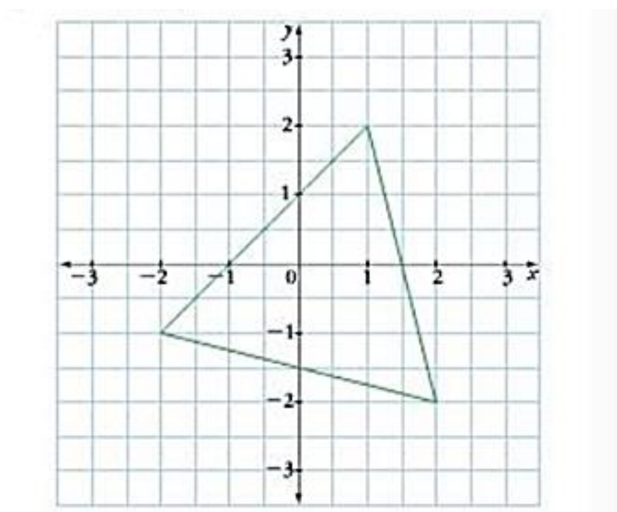
2. Dibuja los puntos dados en el plano cartesiano y determina la distancia entre ellos.

a. $P(-1,2), Q(4,-5)$
b. $P(3,8), Q(10,15)$
c. $P(1,4), Q(-5,-1)$
d. $P(4,4), Q(16,4)$
e. $P(-3,5), Q\ (-3,10)$

3. Determina el punto medio de los segmentos de recta cuyos puntos extremos son *A* y *B.*

a. $A(-3,5), B(4,5)$
b. $(10,2), B(1,-8)$
c. $A(1,0), B(-1,4)$
d. $A(-6,-3), B(4,7)$
e. $A(4,-2), B(10,8)$

4. Para el triángulo que se encuentra en la gráfica responde las preguntas:



Gráfica 10

a. ¿el triángulo es equilátero, isósceles o ninguno de los dos? Justifica

b. ¿Cuáles son los puntos medios de cada lado?

c. ¿Qué valor tiene el perímetro del triángulo?

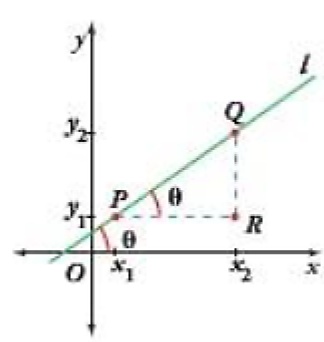
4.5. LINEA RECTA

La recta es uno de los lugares geométricos de mayor estudio realizado en las matemáticas por la enorme cantidad de aplicaciones que presenta y por estar vinculada a una ecuación de primer grado o lineal, dentro de sus aplicaciones se tienen: problemas de costos-ingresos y ganancia, la oferta y demanda, la valoración de un activo a lo largo del tiempo, etc.

4.5.1. PENDIENTE DE UNA RECTA

La pendiente *m* de una recta que pasa a través de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Además, el ángulo de inclinación de esta recta se determina mediante la expresión:

$$tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces otra forma de determinar la pendiente de la recta es:

$$tan\theta = m$$

Si la gráfica de una recta sube de la izquierda a la derecha, la pendiente es positiva. Si la gráfica de la recta cae de la izquierda a la derecha la pendiente es negativa.

Ejemplo: Encuentre la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos (–3, 17) y (4, 3).
Sustituyendo $x_1 = -3$, $y_1 = 17$, $x_2 = 4$, y $y_2 = 3$, obtenemos:

$$m = \frac{3-17}{4-(-3)} = \frac{-14}{7} = -2$$

Así la pendiente es –2.

4.5.2. ECUACIÓNES DE UNA RECTA

Una línea recta se puede entender como un conjunto de puntos alineados en una única dirección.

Uno de los postulados de la geometría Euclidiana dice "para determinar una recta solo es necesario dos puntos del plano.

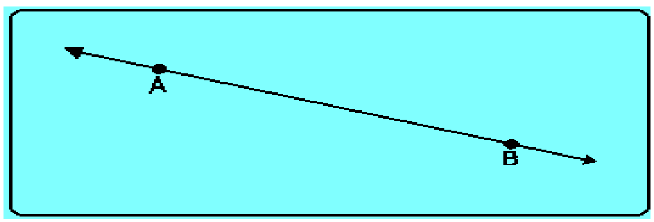


Figura 48

El nombre que recibe la expresión algebraica (función) que determine a una recta dada se denomina Ecuación de la Recta.

4.5.2.1. ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

Ecuación de la recta a partir de un punto $Q(x_0, y_0)$ y su pendiente m.

Su fórmula la vamos a deducir a partir de la ecuación de la pendiente. Como sabemos la ecuación de la pendiente de una recta, está dada por la expresión

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Luego, $y - y_0 = m\ (x - x_0)$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación punto-pendiente de la recta.

Ejemplo: Halla la ecuación punto – pendiente de la recta que pasa por el punto $Q(\overbrace{3}^{x_0}, \overbrace{-4}^{y_0})$ y tiene pendiente -2

$$y - y_0 = m\ (x - x_0)$$
$$y - (-4) = m\ (x - 3)$$
$$y + 4 = m\ (x - 3)$$

4.5.2.2. ECUACIÓN PENDIENTE - INTERCEPTO

Se llama ecuación principal, pendiente - intercepto o ecuación explicita de una recta a la expresión que se obtiene al despejar la ecuación punto – pendiente, así:

$$y - y_0 = m\ (x - x_0)$$
$$y = m\ (x - x_0) + y_0$$
$$y = mx \underbrace{- mx_0 + y_0}_{b}$$
$$y = mx + b$$

En que m representa la pendiente de la recta y b es el coeficiente de posición y es el número en que la recta corta al eje de las coordenadas.

EJEMPLO 1: Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 3 e intercepto b = 10.

Tiene que hallar la ecuación de la recta, esto es, y = mx + b.
Usar la información que le dan:

m = 3 y b = 10 y sustituye en la ecuación
y = 3x + 10.
La ecuación que le pide el ejercicio es y = 3x + 10.

EJEMPLO 2: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y tiene pendiente m = - 5.

Tiene que hallar la ecuación de la recta, esto es, y = mx + b.
Usar la información que te dan: m = - 5 y sustituye en la ecuación:
y = - 5x + b

Ahora tienes que buscar la b; usa el otro dato; la recta pasa por el punto (1, 2), por lo tanto, ese punto es una solución de la ecuación que estás buscando. Sustituye esos valores de x = 1, y = 2 en la ecuación que estás buscando: 2 = - 5 (1) + b
Despeja la variable b en: 2 = - 5 (1) + b
2 = - 5 + b
2 + 5 = b
b = 7

Sustituye el valor de b en la ecuación que estás buscando: y = - 5x + 7
La ecuación es y = - 5x + 7.

Observa el siguiente video, para mayor comprensión:
https://www.youtube.com/watch?v=fQT_v2p71aA

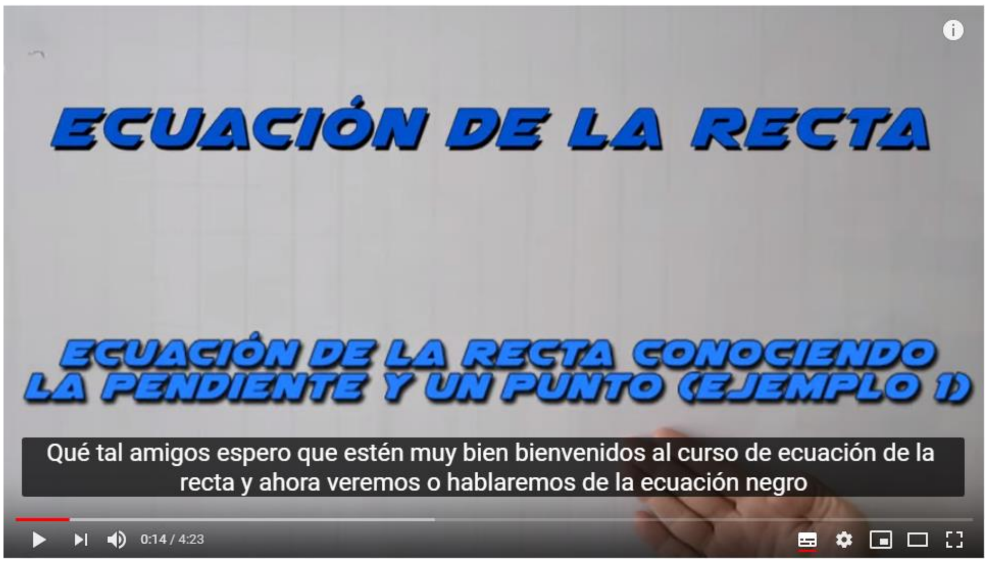


Figura 49 https://www.youtube.com/watch?v=fQT_v2p71aA

4.5.2.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Es de la forma $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son números reales.

De la ecuación general se puede despejar y de tal manera que se puede determinar su ecuación punto – pendiente así:

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$
$$y = \underbrace{\frac{-A}{B}}_{m} x - \underbrace{\frac{C}{B}}_{b}$$
$$y = mx + b$$

Ejemplo: Encontrar la pendiente y el intercepto con el eje y de la de la recta cuya ecuación general se expresa mediante $5x + 2y - 8 = 0$

$$5x + 2y - 8 = 0$$
$$2y = -5x + 8$$
$$y = \underbrace{-\frac{5}{2}}_{m} x + \underbrace{\frac{8}{2}}_{b}$$

Luego, $m = -\frac{5}{2}$ y $b = 4$

Observa los siguientes videos para comprender como encontrar la ecuación general de la recta, o como determinar a partir de la ecuación de la recta, la pendiente y punto de corte con el eje y:
https://www.youtube.com/watch?v=pavmh_Dh8TI y
https://www.youtube.com/watch?v=TkAWx26FhSQ

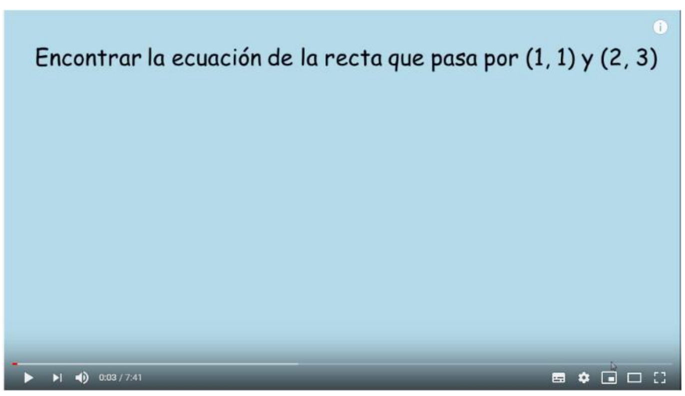


Figura 51 https://www.youtube.com/watch?v=pavmh_Dh8TI

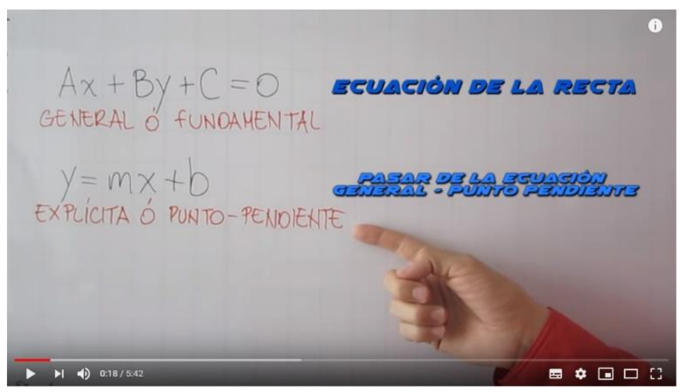


Figura 50 https://www.youtube.com/watch?v=TkAWx26FhSQ

Nota: En un mismo plano, dos o más rectas pueden ser: coincidentes, paralelas, perpendiculares o secantes:

- Las rectas coincidentes tendrán al simplificar, la misma pendiente y mismo corte con el eje y.
- Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, pero no el mismo intercepto.
- Las rectas perpendiculares tienen pendientes recíprocas y opuestas, es decir, el producto entre ellas es igual a -1.
- Las rectas secantes son las que no cumplen ninguno de los anteriores criterios.

En el siguiente video, se explica a mayor profundidad las posiciones relativas que pueden existir entre las rectas: https://www.youtube.com/watch?v=QY0mJGQjE5E

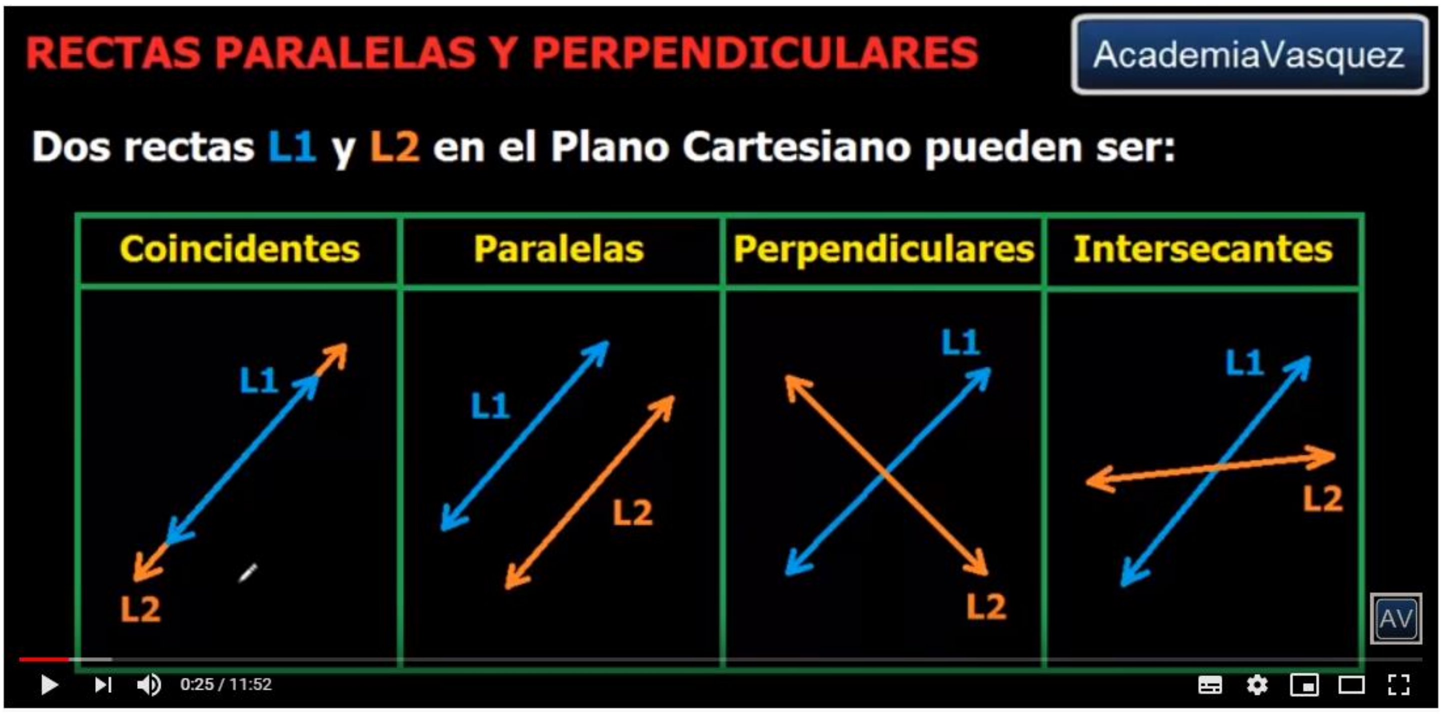


Figura 52 https://www.youtube.com/watch?v=QY0mJGQjE5E

4.5.3. ¿CÓMO GRAFICAR LAS RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO?

En los siguientes videos se halla la explicación a través de dos métodos de como se representa la recta en el plano cartesiano: https://www.youtube.com/watch?v=S43xEr-9vNI y https://www.youtube.com/watch?v=0cuCwPV8ewU

Figura 54 https://www.youtube.com/watch?v=S43xEr-9vNI

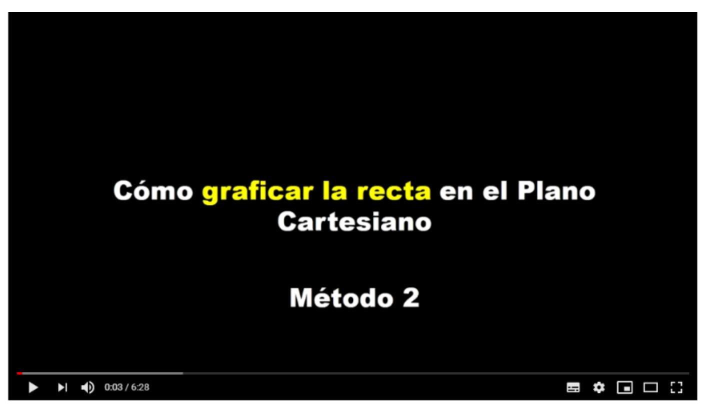


Figura 53 https://www.youtube.com/watch?v=0cuCwPV8ewU

4.5.4. ACTIVIDAD PERSONAL 7.

1. Calcular el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos:
   a) (3; 5) y (7; 9)
   b) (-3; -6) y el origen
   c) (1; 1) y (4; 4)
   d) (2; 3) y (-2; -3)

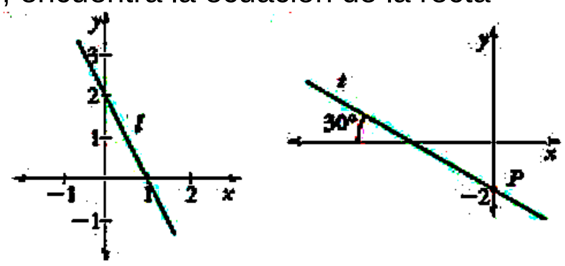
2. Determina la ecuación punto – pendiente de la recta, de acuerdo a los datos suministrados, luego, convierte la ecuación a pendiente – intercepto y grafícala

   a. $P(-2,3)\ y\ m = 10$
   b. $P(4,-7)\ y\ m = 0$
   c. $P(-4,-5)\ y\ m = \frac{1}{2}$
   d. $P(-1,1)\ y\ \theta = 30°$

	COLEGIO PRÍNCIPE SAN CARLOS	Código: FGF-02
	GESTIÓN DE FORMACIÓN	Versión: 02
	GUÍA DE CLASE	Fecha: 10/10/2017

e. $P\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{4}\right)\ y\ \theta = 120°$
f. $P(-7,2)\ y\ Q(5,-3)$
g. Corra al eje x en $x = -3$ y al eje y en $y = 7$
h. Tiene pendiente $\frac{4}{3}$ y corta el eje x en -3

3. Observa cada recta. Luego, encuentra la ecuación de la recta



Gráfica 11

4. Escribe cada ecuación de la recta en forma de pendiente – intercepto $y = mx + b$ a partir de su ecuación general y gráfica.

a. $2x - 3y + 4 = 0$
b. $2y - 3x = 1$
c. $9x - 4y = 0$
d. $x = \frac{2}{3}y + 4$
e. $y + 2 = 0$

5. Lee y resuelve. Una empresa produce ciertos artículos con un costo de $20 cada uno. La empresa tiene costos diarios fijos por servicios que ascienden a $500 y planea vender cada artículo producido en $25 cada uno (los precios están en miles de pesos)
   a. Determina la relación lineal entre la ganancia de la empresa y el número de artículos producidos diarios (ganancia=ingresos-costos)
   b. Explica el significado de la pendiente y de los puntos de corte con los ejes coordenados.

6. Un equipo tecnológico se deprecia linealmente. Si su valor hace cuatro años era de $220.000 y ahora vale $150.000
   a. Halla la ecuación que describe el valor del equipo en términos del tiempo.
   b. Determina el valor que tenía el equipo el año pasado.
   c. ¿Qué precio tendrá en dos años?

7. Para publicar un libro, un editor tiene costos fijos de $3.800.000 más $7.000 por libro producido.
   a. ¿Cuál es el costo total en términos del número de libros producidos?
   b. Si se sabe que cada libro, se vende por $15.000, determina la expresión que muestra el ingreso en términos del número de libros vendidos.
   c. ¿Cuántos libros debe producir y a la vez vender el editor para que se recuperen los costos invertidos en la producción?

8. Determina si cada par de rectas son paralelas, perpendiculares, coincidentes o secantes.

- $\ell_1 = 3x - y - 2 = 0$ y $\ell_2 = y - 3x = 1$
- $\ell_1 = 3y - 2x = 12$ y $\ell_2 = -3x - 6 - 2y = 0$
- $\ell_1 = x + y = 2$ y $\ell_2 = -5y - 5x = -10$
- $\ell_1 = 8x - y = 1$ y $\ell_2 = 2y - 16x = 5$

4.6. ASOCIACIÓN DE VARIABLES

En un estudio estadístico es posible examinar más de una variable en la población. Si de hecho, se estudian dos variables, se debe tener en cuenta que las dos pueden ser de la misma naturaleza o de naturaleza distinta. Así:

- Las dos variables pueden ser cualitativas
- Una variable puede ser cualitativa y la otra cuantitativa.
- Las dos variables pueden ser cuantitativas.

Al caracterizar dos variables cualitativas, o una cualitativa y una cuantitativa, se tienen en cuenta los siguientes elementos:

- Tablas de contingencia o tabla cruzada.
- Tabla marginal.
- Diagramas de barras.
- Moda.

Mientras que, para caracterizar dos variables cuantitativas, dichas variables suelen entenderse como una asociación de parejas ordenadas (x, y) donde x es la variable independiente e y la variable dependiente. Y se tienen en cuenta los siguientes elementos:

- Diagrama de dispersión
- Covarianza
- Coeficiente de correlación lineal.

4.6.1. TABLA CRUZADA O DE CONTINGENCIA

Es una matriz en la cual se cruza la información de dos variables. Las filas corresponden a las categorías de una variable y las columnas a las categorías de la otra variable.

Ejemplo: El rector de un colegio le preguntó a 75 de sus estudiantes sobre el tipo de transporte que usan para llegar al colegio. Las opciones de respuesta son: ruta escolar, transporte público y caminando. Además, al contestar las preguntas se debía marcar si el encuestado era hombre o mujer. Los resultados se muestran en la tabla.

Tipo de transporte				
Género	Ruta	Bus	Caminando	Total
Hombre	27	8	15	50
Mujer	11	7	7	25
Total	38	15	22	75

Tabla 9

En está tabla cruzada o de contingencia, podemos analizar que 27 son hombres que utilizan ruta, 7 mujeres que utilizan bus, 22 son hombres y mujeres que caminan, 25 son en total las mujeres del estudio, entre otras cosas que se pueden observar.

Esta misma tabla, pero porcentualmente con respecto al total de los estudiantes es:

Tipo de transporte				
Género	Ruta	Bus	Caminando	Total
Hombre	36%	10,7%	20%	66,7%
Mujer	14,7%	9,33%	9,31%	33,3%
Total	50,7%	20%	29,31%	100%

Tabla 10

Para comprender un poco más el tema, observa el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=CEWJZxFpC8w

Figura 55https://www.youtube.com/watch?v=CEWJZxFpC8w

4.6.2. TABLA MARGINAL

Es una tabla cruzada, en la cual se muestran las frecuencias relativas con relación al total de cada fila o columna.

Ejemplo: Del ejemplo anterior, se puede extraer dos tablas de contingencia, una con respecto a las columnas, es decir, respecto al total de cada tipo de transporte y otra respecto a las filas, es decir, respecto al total de estudiantes por género.

Género	Ruta	Bus	Caminando
Hombre	27/38	8/15	15/22
Mujer	11/38	7/15	7/22

Tabla 12

Género	Ruta	Bus	Caminando	Total
Hombre	27/50	8/50	15/50	50/50
Mujer	11/25	7/25	7/25	25

Tabla 11

En términos porcentuales, la primera tabla seria:

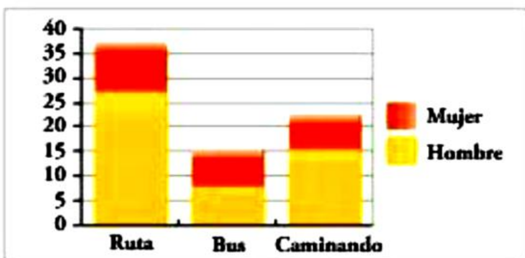
Género	Ruta	Bus	Caminando
Hombre	71%	53%	68,1%
Mujer	29%	47%	31,9%
Total	100%	100%	100%

De estas tablas podemos deducir, por ejemplo, que de los 38 estudiantes que utilizan ruta, 27 son hombres, lo que equivale al 71%.

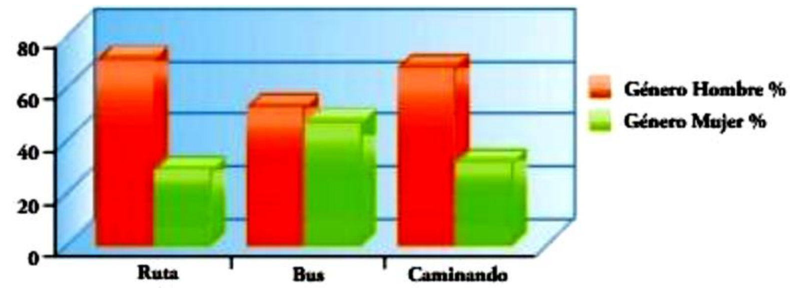
4.6.3. DIAGRAMAS DE BARRAS

Para realizar la gráfica de barras, se ubica en el eje *x* una de las variables, y en la otra los datos correspondientes a las frecuencias absolutas o al porcentaje, y se particiona cada barra ya sea verticalmente u horizontalmente de acuerdo a la frecuencia de los datos de la segunda variable.

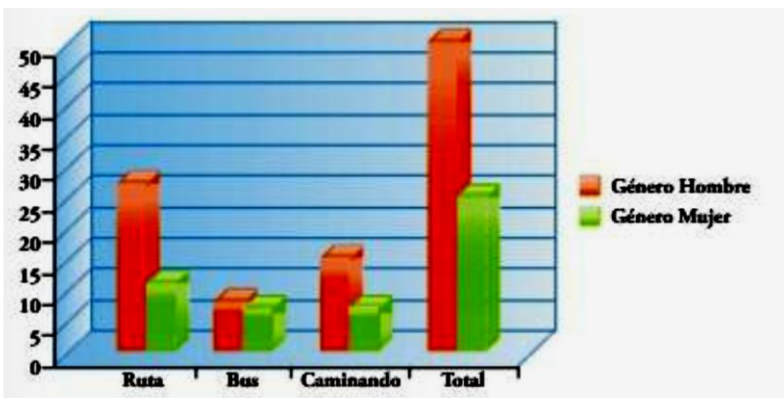
Ejemplo: Del ejemplo anterior se pueden extraer los siguientes gráficos de barra



Gráfica 12



Gráfica 13



Gráfica 14

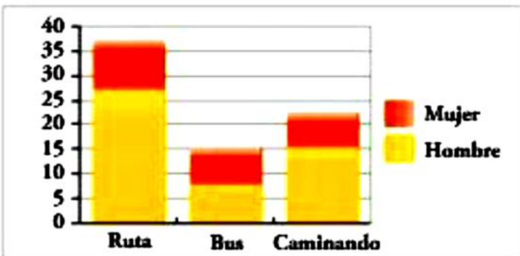
Para comprender un poco sobre cómo realizar estos diagramas de barras, observa el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=obix43MQmCs

Figura 56 https://www.youtube.com/watch?v=obix43MQmCs

4.6.4. MODA

El dato que más frecuencia absoluta tiene.

Ejemplo: De acuerdo con la gráfica:



Gráfica 15

La moda entre los medios de transporte, es tener ruta, mientras que la moda para quienes se transportan caminando es que sea una mujer.

4.6.5. ACTIVIDAD PERSONAL 8

1. Con el fin de determinar posibles donantes en un hospital de la ciudad, se aplico un estudio relacionado con el tipo de sangre y el Rh de sus pacientes.
   El estudio consistió en seleccionar un grupo de pacientes que frecuentaron el hospital en un periodo de un mes. En estos pacientes se tomó una muestra de sangre y se determinó el grupo (O, A, B, AB) y el factor Rh (+, -).
   La muestra fue estratificada, ya que se selecciono teniendo en cuenta las siguientes secciones del hospital: medicina general (MG), medicina especializada (ME) y urgencias (U).
   De la misma manera, se tuvo en cuenta el género de los pacientes: masculino (M) y femenino (F).
   Los resultados de la encuesta se clasificaron por género, sección del hospital en el cual estuvo el paciente y el respectivo tipo de sangre, así:

G	T	S	G	T	S	G	T	S	G	T	S	G	T	S
M	O+	MG	F	O−	U	M	AB−	MG	F	B+	U	F	B−	ME
F	O+	ME	M	O+	MG	F	B+	ME	M	O+	MG	F	O+	U
F	A+	MG	M	O+	U	F	A−	ME	F	AB+	ME	M	O+	MG
M	O+	U	F	B+	U	M	A+	U	F	AB−	U	M	A+	ME
F	O+	MG	M	A+	U	F	B+	ME	F	O+	MG	M	AB+	U
F	A+	U	F	B+	U	M	A−	MG	M	A+	U	F	O+	MG
M	O+	U	F	AB+	ME	M	B+	U	F	AB+	MG	M	B−	ME
M	O+	MG	F	O+	U	F	AB+	ME	M	O+	U	M	B+	MG
F	A+	ME	F	B+	U	M	A+	MG	F	O+	ME	M	A−	ME
M	B+	U	M	O−	ME	F	AB+	MG	F	AB−	U	M	AB+	U
F	A+	ME	M	O+	U	F	O−	MG	F	A+	ME	M	AB+	U

Tabla 13

a. Elabora un diagrama de barras que relacione género y número de personas.
b. Elabora un diagrama de barras que relacione tipo de sangre y número de personas.
c. Elabora un diagrama de barras que relacione sección del hospital y número de personas.
d. Utiliza los datos de género y tipo de sangre para construir una tabla cruzada.
e. Construye la tabla marginal asociada a la variable “tipo de sangre”
f. Responde ¿Qué porcentaje de la muestra corresponde a cada tipo de sangre?
g. ¿Existe alguna relación entre el género y el tipo de sangre? ¿por qué?

2. La Federación Nacional de Agricultores ofrece incentivos económicos a todos los asociados que se inclinen por cultivar alguno de los siguientes productos:
   Café: C   Flores: F   Banano: B   Algodón: A
   En un estudio aplicado entre 40 agricultores interesado, algunos decidieron cultivar cada producto de manera total (T) o parcial (P) en sus fincas. Los resultados se presentan a continuación:

Producto	Cultivo	Producto	Cultivo	Producto	Cultivo	Producto	Cultivo
C	T	F	P	B	T	A	T
F	P	C	T	C	P	F	P
A	T	B	P	F	T	B	T
B	T	C	T	A	P	A	P
C	T	C	T	B	T	C	T
F	P	B	P	C	P	F	T
B	T	A	P	A	P	A	T
C	P	F	P	F	P	C	P
A	T	F	T	A	T	B	P
B	P	C	P	C	T	C	T

Tabla 14

a. Construye la tabla cruzada de estas variables donde filas es “producto” y columnas “cultivo”
b. Construye un diagrama de barras con la información suministrada.
c. Construye una tabla marginal respecto a “cultivo”
d. Construye una tabla porcentual respecto a las filas “producto”

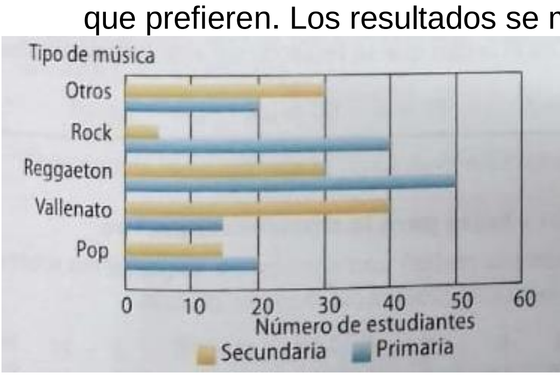
3. En un curso del colegio, se clasificaron los estudiantes de acuerdo a su inclinación profesional con el fin de afianzar habilidades necesarias en cada uno de ellos. Los resultados obtenidos son:

	Interés profesional		
Género	Medicina	Ciencias	Ingeniería
Hombres	$\frac{40}{95}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{50}{70}$
Mujeres	$\frac{55}{95}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{20}{70}$
Total	$\frac{95}{95}$	$\frac{35}{35}$	$\frac{70}{70}$

Tabla 15

a. ¿con relación a cuál variable se construyó la tabla marginal?
b. ¿Cuál es el objetivo del estudio?
c. ¿Cuál es el interés profesional de mayor elección por parte de las mujeres?
d. ¿Cuál es la población y la muestra del estudio?

4. Se encuesto a un grupo de estudiantes de primaria y secundaria para saber el tipo de música que prefieren. Los resultados se muestran en el siguiente gráfico.



Gráfica 16

a. Realiza la tabla marginal para cada una de las variables relacionadas.
b. Realiza la tabla de porcentajes para cada una de las variables relacionadas.
c. Escribe tres conclusiones teniendo en cuenta el análisis de la información recopilada en la encuesta.
d. ¿Cuál es la música que escuchan menos los estudiantes?
e. ¿Cuántos votos de más tiene el reggaetón en relación con el pop para los estudiantes de primaria?

5. La secretaria de salud de un prestigioso corregimiento turístico en la selva inició una investigación sobre el contagio de una enfermedad generada por un mosquito originario de la región. Para analizar el contagio, tomó una muestra de 20 turistas que visitaron el complejo en la pasada temporada y registró si habían contraído la enfermedad después de más de cinco días de permanencia en el lugar. La información se clasificó según la edad y el género de los elementos de la muestra cómo se presenta a continuación.

Turista	Género	Contagio	Edad
1	Hombre	Sí	25
2	Mujer	No	25
3	Mujer	No	27
4	Hombre	Sí	28
5	Mujer	Sí	27
6	Hombre	Sí	24
7	Mujer	No	23
8	Mujer	No	30
9	Hombre	No	31
10	Hombre	Sí	30
11	Mujer	No	28
12	Mujer	Sí	29
13	Hombre	No	30
14	Mujer	No	32
15	Hombre	No	29
16	Hombre	No	27
17	Hombre	No	30
18	Hombre	Sí	32
19	Mujer	No	31
20	Hombre	No	30

Tabla 16

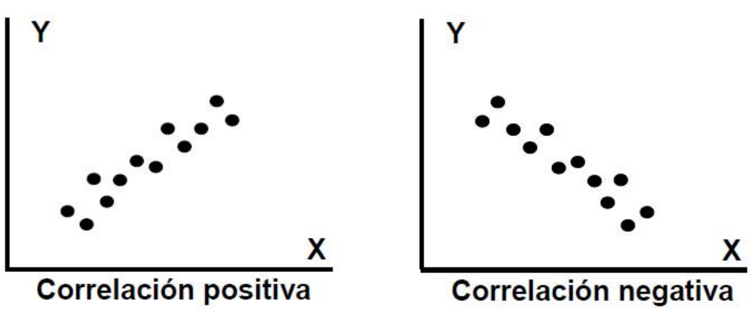
a. Elabora una tabla de contingencia donde se muestren las variables contagio y edad.
b. Elabora una tabla de contingencia donde se muestren las variables género y contagio.
c. Elabora algunas conclusiones de las dos tablas anteriores.
d. Elabora una tabla de contingencia con porcentajes en donde relaciones las variables género y edad.
e. Dibuja el diagrama de barras que representa la situación.
f. Elabora una tabla marginal que relacione las dos variables.
g. Elabora un gráfico de barras que represente los datos registrados en la tabla marginal
h. ¿Qué porcentaje de los turistas hombres se contagiaron de la enfermedad?
i. ¿Qué porcentaje de las turistas mujeres no se contagiaron de la enfermedad?

4.6.6. CARACTERIZACIÓN DE DOS VARIABLES CUANTITATIVAS RELACIONADAS

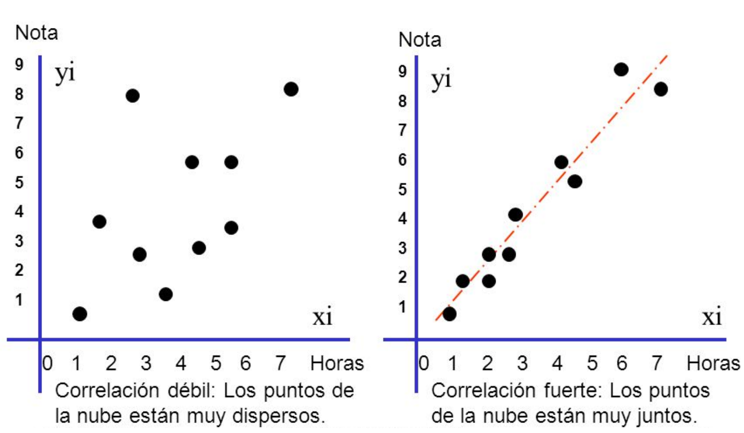
4.6.6.1. DIAGRAMA DE DISPERSIÓN

Es la gráfica de todos los pares ordenados de los datos que corresponden a dos variables cuantitativas que conservan una relación entre ellas.

Si los puntos siguen, aunque sea aproximadamente, una configuración rectilínea, decimos que hay una dependencia lineal entre las variables. La dependencia lineal puede ser fuerte o débil, positiva o negativa.



Gráfica 17



Gráfica 18

Ejemplo: Una compañía procesadora de productos a base de cacao planea poner en el mercado un nuevo dulce de chocolate. Para ello, el departamento de mercado pone en uno de sus puntos de venta degustaciones gratis.

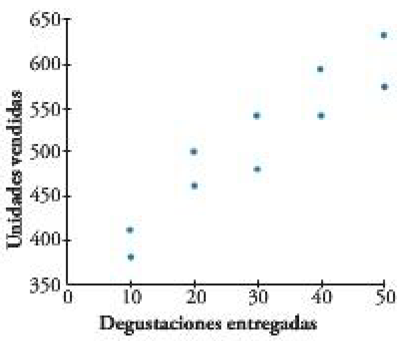
Después de 10 días de aplicar la estrategia, el jefe del departamento de mercado quiere saber si el número de degustaciones entregadas y la cantidad de unidades vendidas conserva alguna relación.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Degustaciones entregadas	20	50	10	30	40	10	50	30	40	20
Unidades vendidas	500	570	410	540	540	380	630	480	590	460

Tabla 17

El diagrama de dispersión que representa la situación es:



Gráfica 19

De la cual podemos observar que la correlación es positiva y fuerte.

Observa el siguiente video para así afianzar el tema de diagrama de dispersión: https://www.youtube.com/watch?v=31OwPATTjrc

Figura 57 https://www.youtube.com/watch?v=31OwPATTjrc

4.6.6.2. COVARIANZA

Se define la covarianza de una muestra así:

$$s_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Donde n es el tamaño de la muestra, (x_i, y_i) son los datos de las variables estudiadas, $\bar{x}$ es el promedio de los datos de x y $\bar{y}$ es el promedio de los datos de y.

Ejemplo: Siguiendo con los datos del ejemplo anterior:

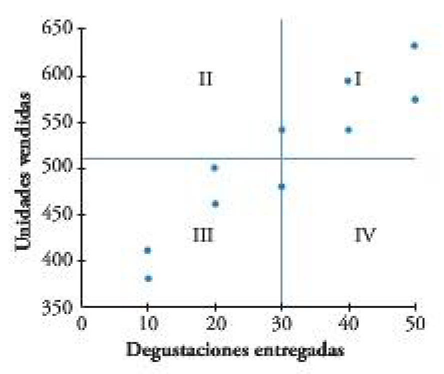
$$\bar{x} = \frac{20+50+10+30+40+10+50+30+40+20}{10} = \frac{300}{10} = 30$$

$$\bar{y} = \frac{500+570+410+540+540+380+630+480+590+460}{10} = \frac{5100}{10} = 510$$

$$s_{xy} = \frac{\begin{array}{c}(20-30)(500-510)+(50-30)(570-510)+(10-30)(410-510)+\\(30-30)(540-510)+(40-30)(540-510)+(10-30)(380-510)+\\(50-30)(630-510)+(30-30)(480-510)+(40-30)(590-510)+(20-30)(460-510)\end{array}}{10-1}$$

$$s_{xy} = \frac{9900}{9} = 1100$$

Para interpretar el significado de este resultado, se divide el diagrama en cuatro cuadrantes, pasando las líneas por los resultados de los promedios de los *x* y de los *y*



Gráfica 20

A continuación, se presentan algunas aclaraciones con respecto al diagrama; que son aplicables a cualquier otro de dispersión

- Los puntos ubicados en el cuadrante I, contiene los datos donde x e y son mayores que la media de cada uno, respectivamente.
- Los puntos ubicados en el cuadrante II, contiene los datos donde *x* es menor que su media, pero *y* mayor que su media.
- Los valores de $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ son positivos en los cuadrantes I y III y negativos en los cuadrantes II Y IV.
- Si el valor de s_{xy} es positivo, se puede afirmar que los puntos que tuvieron mayor influencia están ubicados en su mayoría en los cuadrantes I y III. En este caso se dice que existe una asociación o correlación lineal positiva entre las variables. De ser s_{xy} negativo, se diría que la correlación lineal es negativa y los puntos con mayor influencia estarían en los cuadrantes II y IV.

En el ejemplo, de las degustaciones, se observa que:

- En el diagrama la mayor parte de los puntos están en los cuadrantes I y III
- No hay puntos en los cuadrantes II y IV.
- La correlación entre las dos variables es linealmente positiva.

Observa el siguiente video, para mayor comprensión de la covarianza:
https://www.youtube.com/watch?v=XW-yuLXX4PY

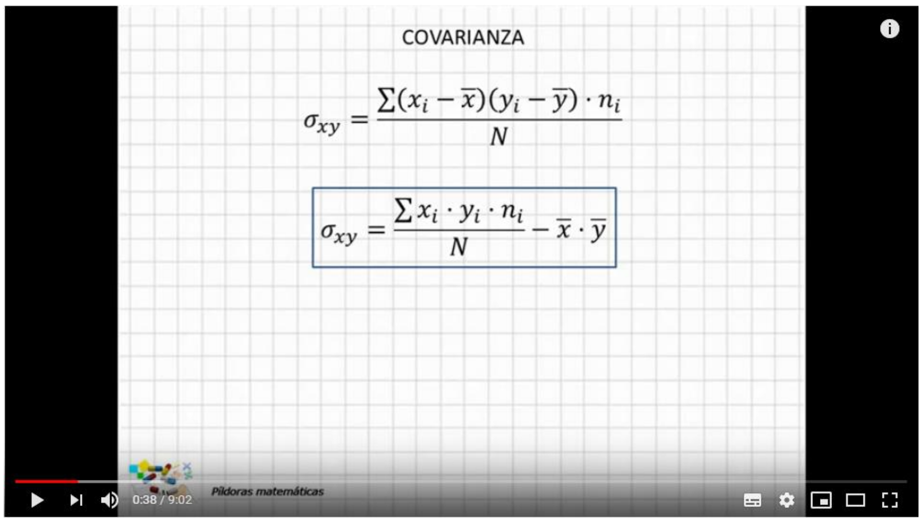


Figura 58 https://www.youtube.com/watch?v=XW-yuLXX4PY

4.6.6.3. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL

Es una medida numérica de la intensidad de la relación entre las dos variables estudiadas. Este valor refleja la consistencia del efecto que el cambio de una variable produce en la otra. Este coeficiente se representa con la letra r y está determinado por:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Donde, $s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ y $s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$

El coeficiente de correlación lineal siempre tiene un valor entre -1 y 1; si r_{xy} equivale a 1 se dice que entre las variables hay una correlación positiva perfecta y si equivale a -1 se dice que entre las variables hay una correlación negativa perfecta y la gráfica de dispersión tiende a ser una línea recta; de igual forma si el coeficiente de correlación es muy cercano a 0 la relación entre las variables es bastante débil.

Ejemplo: Con los datos del ejercicio anterior, calcular el coeficiente de correlación lineal.

Puesto que son muchas operaciones que realizar, resulta conveniente realizar la siguiente tabla, con objeto de que los cálculos sean más sencillos:

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
20	500	−10	100	−10	100	100
50	570	20	400	60	3.600	1.200
10	410	−20	400	−100	10.000	2.000
30	540	0	0	30	900	0
40	540	10	100	30	900	300
10	380	−20	400	−130	16.900	2.600
50	630	20	400	120	14.400	2.400
30	480	0	0	−30	900	0
40	590	10	100	80	6.400	800
20	460	−10	100	−50	2.500	500
			2.000		56.600	9.900

Tabla 18

De donde,

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2000}{9}} = 14{,}9$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{56600}{9}} = 79{,}3$$

$$r_{xy} = \frac{1.100}{14{,}9 \cdot 0{,}93} = 0{,}93$$

Así, se puede afirmar que el coeficiente de correlación es muy cercano a 1, luego las variables tienen una correlación bastante alta.

Esto representa para la compañía procesadora de productos a base de cacao que el número de degustaciones entregadas y la cantidad de unidades vendidas si conserva una relación, donde, a mayor sea el numero de degustaciones entregadas, mayor va a ser el número de unidades vendidas.

Para mayor comprensión, ver el siguiente video hasta el minuto 19:
https://www.youtube.com/watch?v=EE2a2Cr-JfY

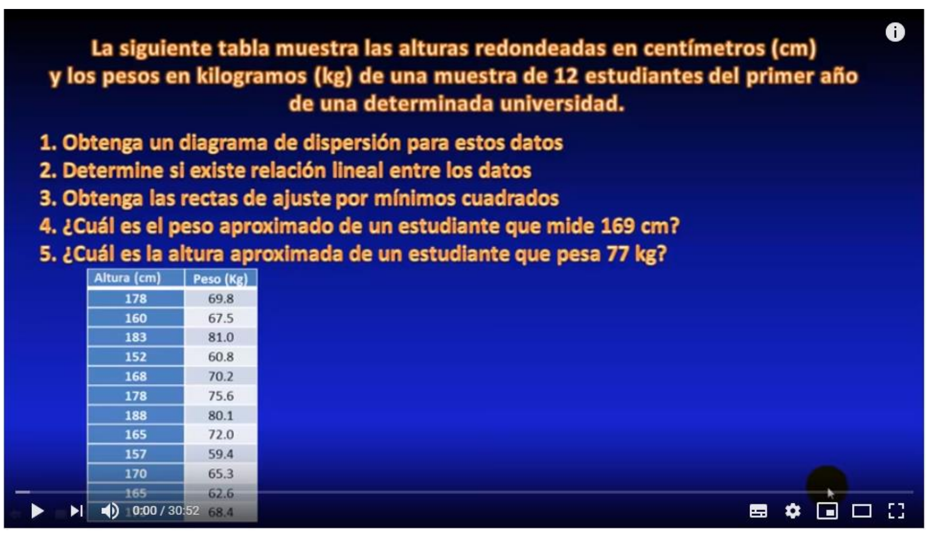


Figura 59 https://www.youtube.com/watch?v=EE2a2Cr-JfY

4.6.6.4. ACTIVIDAD PERSONAL 9

1. Un estudio sobre crecimiento en la población femenina de una ciudad pretende determinar si es posible predecir la estatura de una mujer teniendo como dato la estatura de la madre. A continuación, se presentan los datos en metros, de una muestra de 20 madres y sus respectivas hijas:

X (estatura de la mamá)	160	160	170	154	160	154	162	157	160	162
Y (estatura de la hija)	160	165	165	162	162	160	157	160	162	162

X (estatura de la mamá)	160	162	162	160	170	152	165	162	165	167
Y (estatura de la hija)	162	165	165	157	167	157	160	167	167	165

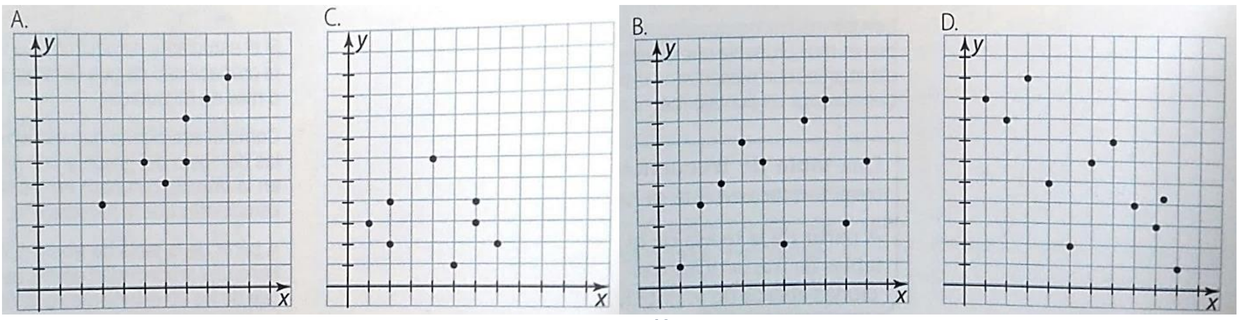
Tabla 19

a. Elabora el diagrama de dispersión para las dos variables.
b. ¿Qué tipo de relación observas en la gráfica?
c. Calcula la media para cada una de las variables.
d. Calcula la covarianza de la muestra y dibuja una representación de la manera como se encuentran distribuidos los datos en relación con este valor.
e. Analiza qué interpretación tienen los datos ubicados en cada uno de los cuatro cuadrantes.
f. Elabora una tabla que resuma los datos necesarios para determinar el coeficiente de correlación entre las variables, luego, calcula este valor.

g. ¿Crees que hay alguna relación entre las variables estatura de la madre y estatura de la hija? Explica tu respuesta teniendo en cuenta los estadísticos hallados.

2. Asocia cada coeficiente de correlación con una de las gráficas

a. $r = -0.129$ b. $r = -0.770$ c. $r = 0.896$ d. $r = 0.402$



Gráfica 21

3. La tabla muestra varias mediciones de la presión arterial mínima y el pulso cardíaco de una persona:

Pulso (X)	93	75	88	80	90	87	80	86	80
Presión (Y)	70	90	75	90	72	80	81	85	92

Tabla 20

a. Calcula la media para cada una de las variables.
b. Calcula la covarianza de la muestra y dibuja una representación de la manera como se encuentran distribuidos los datos en relación con este valor.
c. Analiza qué interpretación tienen los datos ubicados en cada uno de los cuadrantes.
d. Elabora una tabla que resuma los datos necesarios para determinar el coeficiente de correlación entre las variables, luego, calcula este valor.
e. ¿Crees que hay relación entre las variables pulso y presión? Explica tu respuesta teniendo en cuenta los estadísticos hallados.

5. EVALUACIÓN Y RETROALIMENTACIÓN

REJILLA DE EVALUACIÓN Y RETROALIMENTACIÓN	Estratégico Superior (95-100)	Autónomo Alto (80-94)	Resolutivo Básico (70-79)	Pre-formal o Receptivo Bajo (10-69)	Valoración
Planificación del Trabajo / Puntualidad	Realiza uso adecuado de materiales y recursos disponibles, de acuerdo con el procedimiento y plazo establecidos.	Usa materiales y recursos disponibles, de acuerdo con el procedimiento y plazo establecidos.	Usa materiales y recursos disponibles con cierta dificultad, pero se ajusta al plazo establecido.	Usa materiales y recursos disponibles con dificultad, sin ajustarse al plazo establecido.	
Responsabilidad	Asume responsabilidades y comprende las de los demás, valorando el esfuerzo individual y colectivo.	Asume y comprende responsabilidades, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Asume y comprende responsabilidades con dificultad, reconociendo el esfuerzo individual y colectivo.	Elude responsabilidades y tiene dificultad para reconocer el esfuerzo individual y colectivo.	
Participación / Actitud	Forma parte activa y armónica de la dinámica grupal, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de la dinámica grupal, generando propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Forma parte de la dinámica grupal y realiza con dificultad propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	Con dificultad forma parte de la dinámica grupal, sin realizar propuestas que mejoran el aprendizaje cooperativo.	
Habilidades Sociales	Interactúa con empatía y autocontrol, manteniendo actitud de respeto hacia otros puntos de vista y utilizando diferentes habilidades sociales que contribuyen al desarrollo de actividades.	Interactúa con empatía y autocontrol, manteniendo actitud de respeto hacia otros puntos de vista, lo que contribuye al desarrollo de actividades.	Interactúa con actitud de respeto hacia otros puntos de vista, lo que contribuye al desarrollo de actividades.	Interactúa con dificultad durante el desarrollo de actividades.	
Generación y Presentación de Evidencias	Contribuye de manera activa al alcance de metas,	Contribuye al alcance de metas, responsabilizándose de	Contribuye al alcance de metas, pero con dificultad se	Con dificultad contribuye al alcance de metas, sin	

	responsabilizándose de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	responsabiliza de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	responsabilizarse de sus aportes en la presentación y sustentación de evidencias.	

OBSERVACIONES Y/O SUGERENCIAS

____
____
____
____
____

6. BIBLIOGRAFÍA Y/O WEBGRAFÌA

http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Escalante-Silvia.pdf
https://www.geogebra.org/?lang=es
https://laverdadnoticias.com/__export/1537223982608/sites/laverdad/img/2018/09/17/xguila_real.jpg_1834093470.jpg
https://www.youtube.com/watch?v=NbxxVQi0vQg
https://www.youtube.com/watch?v=uK3J5qiWjpg
https://www.youtube.com/watch?v=TlTlq6p_TI0
https://www.youtube.com/watch?v=3Gdjkz60ON4
https://www.youtube.com/watch?v=EOrKO4UWEpo
https://www.youtube.com/watch?v=-AR42voyFuQ
https://www.youtube.com/watch?v=ew188f6LTGI
https://www.youtube.com/watch?v=UVdAQrjnTUw
Matemáticas 10, Proyecto los Caminos del Saber, Santillana. Bogotá, 2013.
Cálculo, trascendentes tempranas, cuarta edición. Mc Graw Hill, 2011.
Cuadernillo de preguntas Saber 11º. Prueba de Matemáticas. Ministerio de Educación.